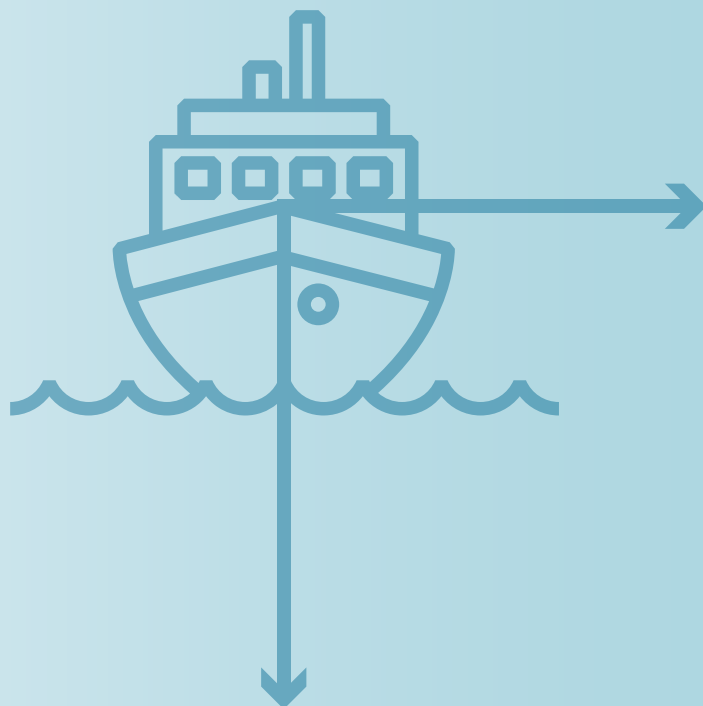


MACIEJ PAWŁOWSKI

Pływerność i stateczność okrętu

KURS PODSTAWOWY



dr hab. Maciej Pawłowski, prof. GSW
Wydział Nauk Inżynierskich, Gdańska Szkoła Wyższa

ZABRANIONE

- Udostępnianie całości lub fragmentów pliku PDF
- Sprzedaż kopii w wersjach: cyfrowej i wydruku

DOZWOLONE

- Pobieranie i wydruk

Dostępne publicznie pod adresem:

<https://gsw.gda.pl/pl/content/plywalnosc-statecznosc-okretu-kurs-podstawowy>
lub https://bit.ly/wydawnictwo_131

Redakcja Projekt okładki Tomasz Mikołajczewski

Wydanie pierwsze online (PDF) Gdańsk 2023

© Copyright by Gdańska Szkoła Wyższa



GDAŃSKA SZKOŁA WYŻSZA

www.gsw.gda.pl/wydawnictwo

WYDAWNICTWO GSW

Gdańska Szkoła Wyższa
80-875 Gdańsk, ul. Biskupia 24B
tel. 58 305 08 11, 12
wydawnictwo@gsw.gda.pl

ISBN 978-83-66270-31-2 Nr katalogowy [131]

SPIS TREŚCI

§ 1. Definicje.....	5
§ 2. Opis kadłuba okrętu	5
§ 3. Skala Bonjeana.....	7
§ 4. Krzywe hydrostatyczne	9
§ 5. Uwzględnianie odkształcenia kadłuba okrętu	13
§ 6. Wpływ zmiany gęstości wody na zanurzenie statku	14
§ 7. Warunki równowagi okrętu.....	15
§ 8. Charakterystyki hydrostatyczne kadłuba	26
a) Krzywa środków wyporu	26
b) Ewoluta metacentryczna	27
c) Ramiona pary sił	28
d) Wykres biegunowy ramion	30
e) Dodatkowe ramię kształtu.....	31
f) Ramiona w układzie kartezjańskim	32
g) Kryteria stateczności	34
h) Krzywa środków pływania.....	34
i) Warstwa wypornościowa	38
§ 9. Krzywa ramion pontonu prostopadłościennego	38
§ 10. Wyznaczanie krzywej ramion	41
a) Metoda pantokaren.....	41
b) Metoda Kryłowa-Dargniesia	41
§ 11. Momenty przechyłające wywołane przemieszczaniem ciężaru lub zmianą wyporności okrętu	44
a) Ładunki płynne	46
b) Przyjęcie ciężaru	48
c) Teoria klina	50
§ 12. Próba przechyłów	52
a) Metoda najmniejszych kwadratów	53
b) Średnia arytmetyczna	55
c) Uwzględnianie stałych błędów	57
§ 13. Stateczność dynamiczna okrętu	59
§ 14. Stateczność okrętu przy zetknięciu z dnem.....	63
a) Dokowanie	63
b) Punktowe zetknięcie okrętu z dnem w PS	64
c) Krawędziowe podparcie okrętu na dnie.....	65
Projekt 1 – Uproszczona skala Bonjeana	68
Projekt 2 – Obliczenie krzywej ramion metodą Kryłowa-Dargniesia	69
Ćwiczenia	70
Literatura	80

STRESZCZENIE

W skrypcie omówiono podstawowe pojęcia dotyczące pływalności i stateczności okrętu, takie jak uwzględnianie odkształcenia kadłuba w obliczeniach wyporności, mało znane w literaturze, wpływ zmiany gęstości wody oraz zdjęcia lub przyjęcia ładunku na zanurzenie statku. Omówiono własności różniczkowe krzywych hydrostatycznych, ramion prostujących, badanie stateczności pod wpływem przesunięcia ładunku, próbę przechyłów, dynamiczne działanie momentu przechylającego oraz stateczność podczas zetknięcia się statku z dnem akwenu. Omówiono wpływ ładunków płynnych na stateczność. Określono najgorsze, pod względem stateczności, wypełnienie zbiornika cieczą, nieznane w literaturze.

Skrypt zawiera dwa zadania projektowe do samodzielnego wykonania oraz liczne zadania – większość z podanymi rozwiązaniami.

§ 1. Definicje

Pływalność i stateczność okrętu są częścią statyki okrętu, omawianej w ramach teorii okrętu. Statyka zajmuje się warunkami równowagi okrętu znajdującego się na wodzie spokojnej, poddanego działaniu dwóch sił grawitacyjnych: *siły ciężkości* i *siły wyporu* oraz badaniem, czy równowaga tych sił, a tym samym równowaga okrętu, jest trwała. O równowadze decyduje położenie *środka wyporu* względem *środka ciężkości* okrętu.

Ciężar – wartość siły ciężkości

Moment prostujący – moment pary sił, utworzonej z siły ciężkości i siły wyporu

Owrężę – największy przekrój wręgowy

Ramię prostujące l – ramię momentu prostującego, czyli odległość środka ciężkości od linii działania siły wyporu

Rezerwa wyporności V_r – objętość ciała nad wodnicą pływania

Siła wyporu – wypadkowa elementarnych sił naporu, działających na powierzchnię zwilżoną kadłuba, skierowana pionowo, przechodząca przez środek wyporu

Środek wyporu – środek objętości zanurzonej części kadłuba. Punkt ten zależy od nachylenia ciała

Wodnica (pływania) – przekrój ciała przez swobodną powierzchnię cieczy

Wręg – przekrój okrętu pionową płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny symetrii (PS)

Wyporność (objętościowa) V – objętości zanurzonej części kadłuba

Wypór – wartość siły wyporu $D = V\gamma$, równa ciężarowi wypartej cieczy

Zakres stateczności – kąt przechyłu, przy którym zeruje się ramię prostujące

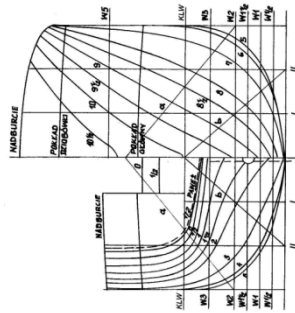
$\gamma = \rho g$ – ciężar właściwy

ρ – gęstość [$\text{tona/m}^3 = \text{kg/dm}^3 = \text{g/cm}^3$]

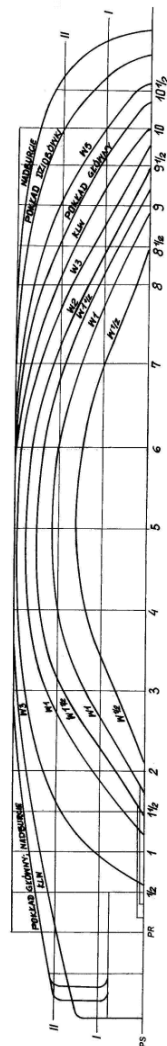
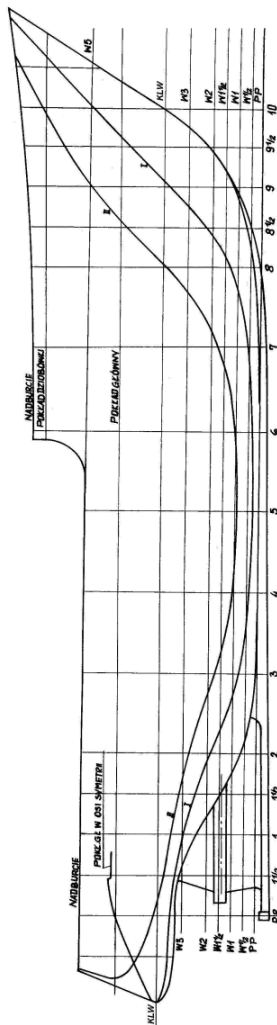
g – przyspieszenie ziemskie, równe $9,81 \text{ m/s}^2$

§ 2. Opis kadłuba okrętu

Do obliczeń elementów geometrycznych kadłuba stosuje się kartezjański prawoskrętny układ współrzędnych $Oxyz$; płaszczyzna Oxy leży w *płaszczyźnie podstawowej* (PP) kadłuba (w płaszczyźnie stępki), płaszczyzna Oxz pokrywa się z *płaszczyzną symetrii* (PS) kadłuba, zaś płaszczyzna Oyz przechodzi przez *pion rufowy* (PR) statku i jest prostopadła do PP i PS. Oś Ox skierowana jest ku dziobowi statku, oś Oy jest skierowana na lewą burzę, zaś oś Oz jest skierowana w górę i pokrywa się z PR. Przekroje płaszczyznami równoległymi do PP nazywają się *wodnicami*, równoległymi do PS *wzdłużnicami*, a równoległymi do płaszczyzny Oyz *wręgami*. Zbiór tych przekrojów opisuje kształt kadłuba i nazywa się rysunkiem linii teoretycznych kadłuba. Przykład linii teoretycznych pokazuje rys. 1. Rzut z boku nazywa się rzutem *wzdłużnicowym*, rzut z góry rzutem *wodnicowym*, zaś rzut podłużny rzutem *wręgowym* lub *owrężeniem*.



Rys. 1. Linie teoretyczne trawlera rybackiego



Statek ma dwa piony: pion rufowy (PR), pokrywający się z osią steru, i pion dziobowy (PD), przechodzący przez punkt przecięcia *konstrukcyjnej linii wodnej* (KLW), czyli wodnicy konstrukcyjnej z zarysem dziobnicy w PS statku. Odległość między pionami nazywa się *długością między pionami* i oznaczana jest przez L_{pp} .

W klasycznym układzie linii teoretycznych PR jest wręgiem zerowym, a PD wręgiem 10. Pozostałe wręgi są w równych odstępach co $0,1L_{pp}$. Oprócz nich daje się po dwa wręgi połówkowe: w części rufowej $\frac{1}{2}$ i $1\frac{1}{2}$, i dziobowej $8\frac{1}{2}$ oraz $9\frac{1}{2}$. Co do wodnic, KLW jest wodnicą W4, PP jest wodnicą W0. Oprócz wodnic całkowitych zazwyczaj jest jedna wodnica połówkowa $W\frac{1}{2}$, rzadziej $W1\frac{1}{2}$. W przypadku wzdłużnic, w układzie klasycznym połowę szerokości statku dzieli się przekrojami wzdłużnymi na cztery równe części i oznacza się je cyframi rzymskimi. Wzdłużnica zerowa pokrywa się z PS, a IV z burtą statku. W przykładzie na rys. 1 jest nietypowy podział, bowiem wzdłużnice występują co $\frac{1}{3}$ połowy szerokości statku.

Kadłub statku charakteryzuje się za pomocą pięciu współczynników pełnotliwości: współczynnika pełnotliwości kadłuba:

$$\delta \equiv V/LBT,$$

współczynnika pełnotliwości owręża (największego przekroju wręgowego):

$$\beta \equiv A_{\otimes}/BT,$$

współczynnika pełnotliwości wodnicy:

$$\alpha \equiv A_{wL}/LB,$$

współczynnika pełnotliwości wzdłużnej:

$$\phi \equiv V/A_{\otimes}L = \delta/\beta$$

i współczynnika pełnotliwości pionowej:

$$\kappa \equiv V/A_{wL}T = \delta/\alpha, \quad (1)$$

gdzie L i B jest długością i szerokością wodnicy, zaś T jest zanurzeniem statku. Cztery pierwsze współczynniki dotyczą zanurzenia konstrukcyjnego statku. Ostatni współczynnik ma zastosowanie dla dowolnego zanurzenia z ; odgrywa dużą rolę w pływerności okrętu.

§ 3. Skala Bonjeana

Powstaje praktyczne pytanie, jak znaleźć wypór i współrzędne środka wyporu dla zadanego zanurzenia statku, czy odwrotnie – jak znaleźć zanurzenie dla zadanej wyporności statku. W tym celu musimy znać kształt statku, przedstawiany graficznie za pomocą linii teoretycznych kadłuba lub tabelarycznie, za pomocą tzw. tabeli rzędnych.

Wyporność statku V i współrzędne środka wyporu F dla dowolnego zanurzenia statku, niekoniecznie na równej stępce, oblicza się za pomocą przekrojów wręgowych, gdyż dają najbardziej dokładne wyniki. Do obliczania wspomnianych charakterystyk można używać innych przekrojów, lecz uzyskuje się mniej dokładne wyniki. Wzory obliczeniowe wynikają z ogólnych wzorów na wyporność i współrzędne środka wyporu:

$$V = \int_V dV = \int_L \int_{A_{wr}} dx dA = \int_L dx \int_{A_{wr}} dA = \int_L A_{wr} dx,$$

gdzie $dA = dydz$ jest elementem powierzchni wręgu. Widzimy, że wyporność równa się całce z funkcji $A_{wr}(x)$, czyli polu pod krzywą *powierzchni wręgów*. Ze wzoru tego wynika zależność różniczkowa: $A_{wr} = dV/dx$, co oznacza, że rozkład wyporności w kierunku wzdłużnym jest tożsamy z krzywą powierzchni wręgów $A_{wr}(x)$.

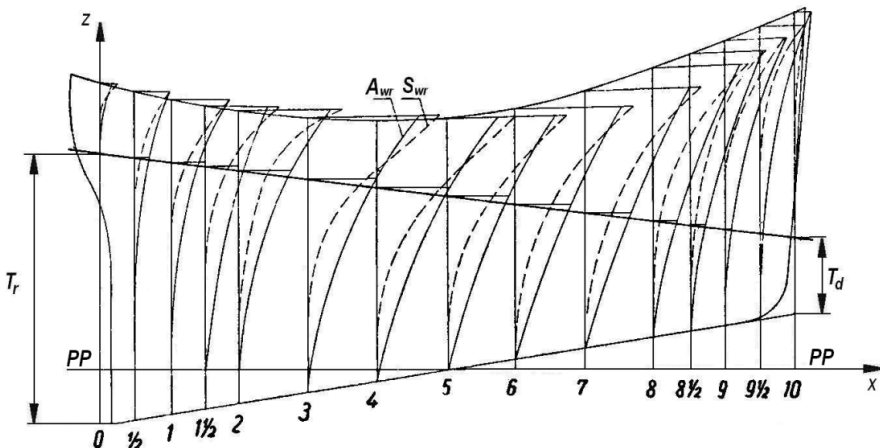
By obliczyć współrzędne środka wyporu, musimy wziąć składowe skalarne promienia wodzącego środka wyporu, określonego wzorami:

$$x_F = \frac{1}{V} \int_V x dV = \frac{1}{V} \int_L x A_{wr} dx,$$

$$z_F = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{1}{V} \int_L \int_{A_{wr}} z dx dA = \frac{1}{V} \int_L dx \int_{A_{wr}} z dA = \frac{1}{V} \int_L S_{wr} dx,$$

gdzie $S_{wr} = \int_{A_{wr}} z dA$ jest momentem statycznym pola wręgu względem płaszczyzny podstawowej (PP). Dla statku posiadającego płaszczyznę symetrii (PS), współrzędna $y_F = 0$. Całki w powyższych wzorach przedstawiają moment statyczny wyporności, odpowiednio względem owręża (jeśli x liczone jest od owręża) i względem PP. Dla każdego wręgu trzeba więc znać pole wręgu A_{wr} i moment statyczny S_{wr} pola wręgu względem PP w funkcji zanurzenia wręgu z . Te dwie charakterystyki przedstawia się na rysunku zwanym *skalą Bonjeana*, pokazaną przykładowo na rys. 2 dla statku z przegłębieniem konstrukcyjnym. Rysunek wyjaśnia ponadto znaczenie zanurzenia dziobowego i rufowego w takim przypadku.

Na skalę Bonjeana nanosi się ślad wodnicy pływania, co łatwo zrobić, gdy znamy zanurzenie na PR i PD, i odczytuje pola A_{wr} i momenty statyczne S_{wr} względem PP zanurzonej części przekroju wręgowego, tj. w punkcie przecięcia się wręgu ze śladem wodnicy. Dawniej, obie charakterystyki obliczało się za pomocą planimetru. Moment statyczny pola wręgu można bowiem obliczyć planimetrem, gdyż wielkość ta równa się polu pod krzywą $A_{wr} = A(z)$, co wynika ze wzoru na $S_{wr} = \int_{A_{wr}} z dA$, gdzie $dA = 2ydz$. Ze wzoru na moment wynika ponadto, że charakterystyka S_{wr} jest o stopień wyższa od charakterystyki A_{wr} , co potwierdza rys. 2: krzywe S_{wr} są bardziej wygięte niż krzywe A_{wr} .

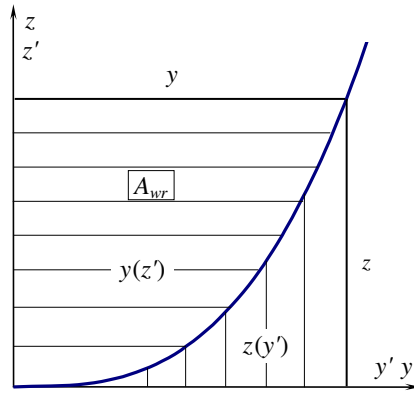


Rys. 2. Skala Bonjeana

Obecnie obliczenia krzywych A_{wr} i S_{wr} wykonuje się numerycznie. Gdy stosujemy wzory na całkowanie funkcji regularnych, jak np. wzór Simpsona, musimy pamiętać że wręg w części dennej, prostopadły do PS, jest funkcją osobliwą (osobliwość posiada pierwsza pochodna) i całkowanie takimi wzorami daje duży błąd metody. Obejściem trudności jest zastosowanie całkowania przez części:

$$A_{wr} = \int_{A_{wr}} dA = 2 \int_0^z y dz' = 2 [yz - \int_0^y z dy'],$$

gdzie y' i z' to nieme zmienne całkowania; w ostatniej całce występuje całkowanie funkcji odwrotnej do funkcji $y(z')$, która jest regularna. Interpretacja wzoru jest oczywista (rys. 3): by otrzymać pole nad krzywą, od pola prostokąta yz należy odjąć pole pod krzywą.



Rys. 3. Obliczanie powierzchni wręgu

Analogiczny wzór otrzymamy na moment statyczny:

$$S_{wr} = yz^2 - \int_0^y z^2 dy'.$$

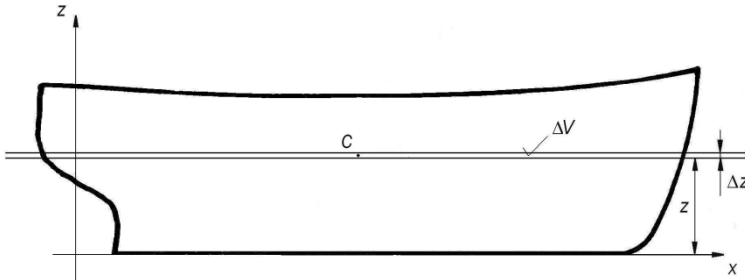
§ 4. Krzywe hydrostatyczne

W eksploatacji statku skali Bonjeana używa się do znalezienia wyporności i współrzędnych środka wyporu statku przegłębionego. Dla statku nieprzegłębionego (na równej stępce lub z przegłębieniem konstrukcyjnym) wielkości te oblicza się z pomocą skali Bonjeana dla różnych zanurzeń (dla statku z przegłębieniem konstrukcyjnym dla różnych zanurzeń średnich) i przedstawia w postaci wykresu zwanego *krzywymi hydrostatycznymi*, gdzie zmienna niezależna z jest na osi pionowej, co wynika ze względów praktycznych (tak się zawsze postępuje, ilekroć wykresy służą do odczytywania wartości funkcji).

Podobnie można postąpić ze statkiem przegłębionym. Charakterystyki geometryczne kadłuba zależą w tym wypadku od dwóch zanurzeń T_r i T_d , na rufie i dziobie, w szczególności $V = V(T_r, T_d)$ oraz $x_F = x_F(T_r, T_d)$. Wielkości te oblicza się z pomocą skali Bonjeana dla szeregu zanurzeń na rufie i dziobie i przedstawia się w postaci wykresu zwanego

wykresem Firsowa. Wykres ten zawiera dwie rodziny krzywych: jednakowych wyporności $V = const$ i jednakowych odciętych środka wyporu $x_F = const$, w układzie zanurzeń na rufie i dziobie T_r i T_d . Przyjmuje się, że wpływ przegłębienia na rzędną środka wyporu z_F jest pomijalny, wobec czego wartość tę można odczytać z krzywych hydrostatycznych dla zanurzenia średniego na owręzu $T_\otimes$.

Krzywe hydrostatyczne są krzywymi różniczkowalnymi względem zanurzenia. Pochodne krzywych (czyli współczynniki kierunkowe stycznych do krzywych) można znaleźć, korzystając z elementarnych zależności różniczkowych. W przypadku krzywej wyporności $V = V(z)$ przyrost wyporności $\Delta V = A_{WL}\Delta z$ równa się objętości plasterka o grubości Δz , co widać na rys. 4.

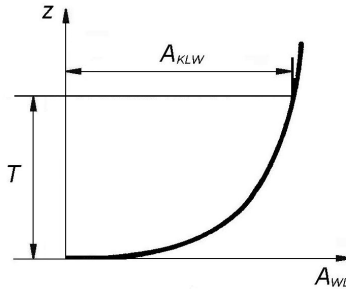


Rys. 4

W granicy mamy, że pochodna krzywej wyporności względem zanurzenia równa się polu wodnicy:

$$dV/dz = A_{WL}. \quad (2)$$

Inaczej mówiąc, rozkład wyporności w kierunku pionowym dV/dz jest tożsamy z krzywą powierzchni wodnic A_{WL} . Typowy jej przebieg w funkcji zmiennej z pokazany jest na rys. 5. Pole nad krzywą $A_{WL}(z)$ do zadanego z przedstawia wyporność $V(z)$. Krzywa wyporności jest więc krzywą całkową pól wodnic A_{WL} .



Rys. 5. Rozkład wyporności w kierunku pionowym

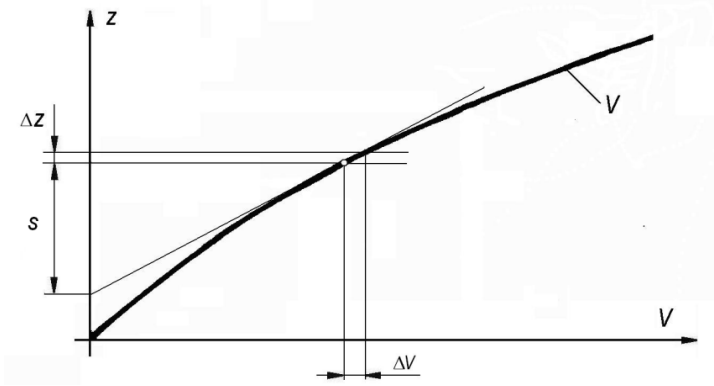
Przebieg krzywej wyporności w funkcji zanurzenia pokazany jest na rys. 6. Można pokazać, że $s/z = \kappa$, czyli stosunek podstycznej s do zanurzenia z równa się współczynnikowi

pełnotliwości pionowej κ . Im mniejszy ten współczynnik, tym większe wygięcie krzywej wyporności.

Z kolei wykres rzędnej środka wyporu $z_F = z_F(z)$ w funkcji zanurzenia statku jest prawie linią prostą, przechodzącą przez początek układu. Jej pochodną znajdziemy, różniczkując z_F względem z . Ponieważ $z_F = S_{VPP}/V$, stąd:

$$z'_F = \frac{S'V - SV'}{V^2} = \frac{S' - z_F V'}{V},$$

gdzie $S = S_{VPP}$. Z rys. 4 wynika, że zmiana momentu statycznego wyporności wynika z dodanego plasterka. Zatem: $\Delta S = z\Delta V$, co daje w granicy $S' = zA_{WL}$. Tak więc:



Rys. 6. Krzywa wyporności

$$z'_F = \frac{A_{WL}}{V} (z - z_F) = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{z}{z_F} \right).$$

Różniczka momentu statycznego wyporności $\Delta S = z\Delta V$ ma prostą interpretację geometryczną – jest polem pionowego paska, pokazanego na rys. 6. Zatem pole pod krzywą wyporności do zadanej wyporności V przedstawia moment statyczny wyporności S_{VPP} względem PP. Tak więc rzędna środka wyporu $z_F = S_{VPP}/V$ przedstawia wysokość prostokąta o podstawie V i takim samym polu, co trójkąt krzywoliniowy o wysokości z . Ponieważ krzywa jest wypukła, $z_F > z$, przy czym stosunek $z_F/z \approx const$, co tłumaczy dlaczego krzywa z_F w funkcji zanurzenia niewiele odbiega od prostej. Jeśli przyjąć, że $z_F/z = const$, to krzywa jest prostą o współczynniku kierunkowym $z'_F = z_F/z$. Równanie tej prostej wynika natychmiast z równania na pochodną z'_F . Otrzymamy:

$$z_F = \frac{z}{1+\kappa}. \quad (3)$$

Podobnie wygląda obliczenie pochodnej odciętej środka wyporu $x_F = z_F(z)$. Ponieważ $x_F = S_{V\infty}/V$, gdzie $S_{V\infty}$ jest momentem statycznym wyporności względem owręża, stąd:

$$x'_F = \frac{S'V - SV'}{V^2} = \frac{S' - x_F V'}{V},$$

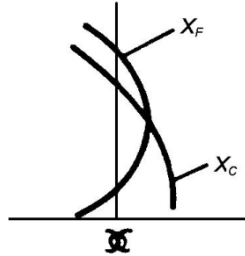
gdzie $S = S_{V\otimes}$. Zmiana momentu statycznego wyporności wynika z dodanego plasterka:

$$\Delta S = x_c \Delta V,$$

gdzie x_c jest odciętą środka ciężkości plasterka względem owręża, tożsamą z odciętą środka ciężkości wodnicy A_{WL} , co daje w granicy $S' = x_c A_{WL}$. Tak więc:

$$x'_F = \frac{A_{WL}}{V} (x_c - x_F).$$

Ekstremum krzywej x_F występuje, gdy $x_c = x_F$, czyli gdy obie krzywe przecinają się. Przykładowy przebieg tych krzywych pokazany jest na rys. 7.



Rys. 7

PRZYKŁAD 1. Jednorodne ciało o gęstości ρ_c pływa w cieczy o gęstości ρ . Wykonujemy identyczne ciało z materiału o gęstości ρ'_c . Jaka gęstość musi mieć ciecz ρ' , by: a) wodnica była ta sama, b) wodnica była ta sama lecz dla ciała obróconego w pionie o 180° , tj. pływającego do góry dnem?

R o z w i ą z a n i e. Oznaczmy przez V_c objętość całkowitą ciała. Zatem ciężar ciała $P = V_c \gamma_c$, zaś wypór (ciężar wypartej wody) $D = V \gamma = (V_c - V_r) \gamma$, gdyż objętość zanurzona równa się różnicy pomiędzy objętością całkowitą i rezerwą wyporności, gdzie γ_c i γ to odpowiednio ciężar właściwy ciała i wody. Ciało pływa w spoczynku, gdy $P = D$. Stąd:

$$V_c \gamma_c = (V_c - V_r) \gamma,$$

czyli
$$V_r / V_c = 1 - \gamma_c / \gamma = 1 - \rho_c / \rho.$$

Ponieważ w punkcie a) stosunek V_r / V_c jest zachowany, stąd zachowany musi być stosunek gęstości $\rho_c / \rho = (\rho_c / \rho)'$.

W przypadku b) warunek pływania przyjmuje postać:

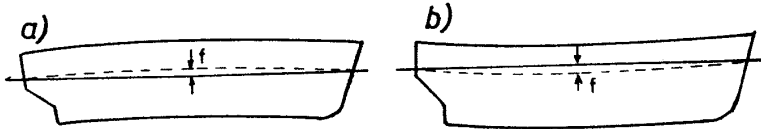
$$V_c \gamma_c = V_r \gamma',$$

czyli
$$V_r / V_c = \gamma_c / \gamma' = \rho_c / \rho'.$$

Stosunek $V_r / V_c = (V_c - V) / V_c = 1 - V / V_c = \rho_c / \rho'$. Ale $V / V_c = \rho_c / \rho$, stąd stosunek gęstości $\rho_c / \rho' = 1 - \rho_c / \rho$ jest dopełnieniem do jedynki. ■

§ 5. Uwzględnianie odkształcenia kadłuba okrętu

Zdarza się, że zanurzenie średnie statku $T_s = \frac{1}{2}(T_r + T_d)$ nie pokrywa się z zanurzeniem owręza T_M . Taka sytuacja jest wynikiem odkształcenia (zgięcia) kadłuba w PS, tj. ugięcia lub wygięcia, jak na rys. 8. W dokładnych obliczeniach wyporności fakt ten trzeba uwzględniać. Najprościej byłoby narysować ślad wodnicy na skali Bonjeana i wykonać obliczenia dla faktycznego zanurzenia wręgów. Sposób ten praktycznie odpada z uwagi na dużą pracochłonność.



Rys. 8. Odształcenie kadłuba: a) wygięcie (*hogging*), b) ugięcie (*sagging*)

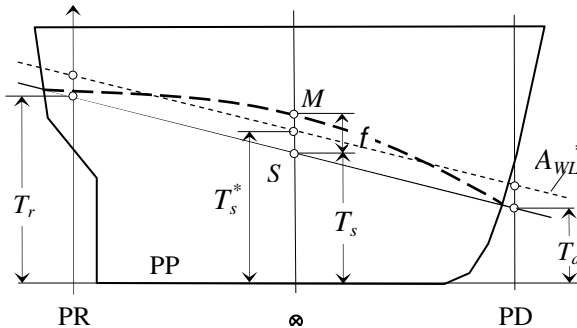
Zatem obliczenia wykonujemy dla przybliżonego przebiegu zanurzeń wręgów na skali Bonjeana (rys. 9). Przebieg zanurzeń (linia przerywana na rys. 9 – wygięta, gdy kadłub jest ugięty, ugięta, gdy kadłub jest wygięty) rysujemy w oparciu o trzy punkty, tj. zanurzenia na pionach T_r i T_d i na śródkręciu T_M , znane z pomiarów, przybliżone parabolą trzeciego stopnia (dla lepszej czytelności narysowana nie w proporcji). Dla takiej paraboli wyporność między wodnicą płaską i odkształconą równa się:

$$\Delta V \approx \frac{3}{4} A_{WL} f,$$

gdzie A_{WL} jest wodnicą płaską, wyznaczoną przez zanurzenia na pionach. Zatem wodnica zastępcza A_{WL}^* leży w odległości:

$$\Delta T = \frac{3}{4} f \quad (4)$$

od wodnicy A_{WL} , gdzie $f = T_M - T_s$ jest strzałką odkształcenia statku na śródkręciu (ugięcia lub wygięcia). Z uwagi na to samo przegłębienie, obie wodnice są do siebie równoległe. Wodnica zastępcza A_{WL}^* , narysowana linią kropkowaną, odcina na pionach zanurzenia, które definiują wyporność statku. Są one następujące:



Rys. 9. Przebieg zanurzeń wręgów statku ugiętego na skali Bonjeana

$$\begin{aligned} T_r^* &= T_r + \frac{3}{4} f \\ T_s^* &= T_s + \frac{3}{4} (T_M - T_s) = \frac{1}{4} T_s + \frac{3}{4} T_M \\ T_d^* &= T_d + \frac{3}{4} f. \end{aligned} \quad (5)$$

Dalsze obliczenia wykonujemy standardowo. Zwykle przegłębienia są niewielkie. Wobec czego możemy skorzystać z krzywych hydrostatycznych, robiąc odczyty dla skorygowanego zanurzenia średniego $T = T_s^*$.

§ 6. Wpływ zmiany gęstości wody na zanurzenie statku

Statek pływa w wodzie o różnej gęstości. Zmiany gęstości związane są głównie z zasoleniem wody. W portach rzecznych woda jest praktycznie słodka, stąd gęstość $\rho = 1 \text{ t/m}^3$. Standardowa gęstość wody w morzach i oceanach, z wyjątkiem Bałtyku, wynosi $\rho = 1,025 \text{ t/m}^3$. Bałtyk jest słabo zasolony, gęstość wody wynosi $\rho = 1,005 \text{ t/m}^3$.

Chcemy zbadać, jak zmienia się zanurzenie statku, gdy przepływa z wody o gęstości ρ_1 do wody o gęstości ρ_2 . Przyjmując, że masa statku w obu przypadkach jest taka sama, taka sama musi być też masa wypartej wody. Zatem:

$$\begin{aligned} V_2 \rho_2 &= V_1 \rho_1 \\ V_2 &= V_1 \rho_1 / \rho_2. \end{aligned}$$

Nowa wyporność V_2 zmieniona jest o ΔV w stosunku do starej wyporności V_1 . Zatem:

$$\begin{aligned} V_1 + \Delta V &= V_1 \rho_1 / \rho_2 \\ \Delta V &= V_1 (\rho_1 / \rho_2 - 1). \end{aligned}$$

Mamy więc wzór na zmianę wyporności wywołaną zmianą gęstości wody:

$$\Delta V = V_1 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} = -V_1 \frac{\Delta \rho}{\rho_2}.$$

Pamiętamy, że przez zmianę rozumiemy różnicę między nową i starą wielkością. Uwzględniając, że zmiana wyporności $\Delta V = A_{WL} \Delta T$, otrzymamy równanie:

$$A_{WL} \Delta T = -V_1 \frac{\Delta \rho}{\rho_2}.$$

Stąd zmiana zanurzenia ΔT wyrazi się wzorem:

$$\Delta T = -\frac{V_1}{A_{WL}} \frac{\Delta \rho}{\rho_2},$$

gdzie A_{WL} jest polem wodnicy pływania. Rozszerzając pierwszy ułamek przez zanurzenie T_1 , otrzymamy:

$$\Delta T = -\frac{V_1}{A_{WL}T_1}T_1\frac{\Delta\rho}{\rho_2}.$$

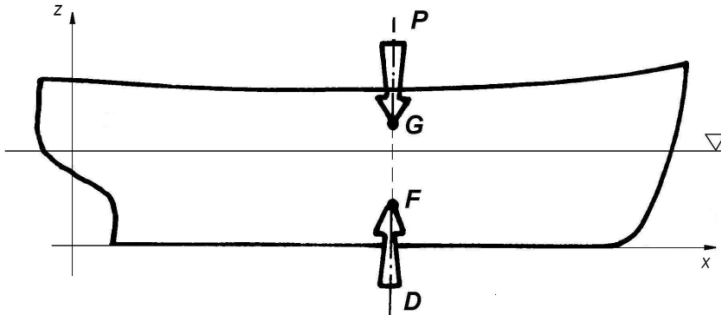
Pierwszy ułamek przedstawia współczynnik pełnotliwości pionowej κ . Tak więc:

$$\Delta T = -\kappa T_1\frac{\Delta\rho}{\rho_2}. \quad (6)$$

Gdy statek wychodzi z portu rzecznego na pełne morze, $\Delta\rho/\rho_2 = 1/41$, zanurzenie statku zmniejszy się, w odwrotną stronę $\Delta\rho/\rho_2 = -1/40$, zanurzenie statku zwiększy się.

§ 7. Warunki równowagi okrętu

Na statek, który pływa na wodzie spokojnej, działają dwie siły: siła ciężkości $\mathbf{P}$, przechodząca przez środek ciężkości G , oraz siła wyporu $\mathbf{D}$, której linia działania przechodzi przez środek wyporu F , czyli środek objętości zanurzonej części kadłuba. Siły te są pionowe i przeciwnie skierowane. Są one w równowadze, gdy są sobie równe, czyli gdy $P = D$, i gdy działają w tej samej linii pionowej, czyli gdy środek wyporu i środek ciężkości leżą na jednej linii pionowej (rys. 10), co wynika z ogólnych praw statyki.



Rys. 10

W położeniu wyprostowanym, obydwie punkty znajdują się w PS statku. Wartość siły wyporu, czyli wypór $D = V\gamma$ równa się ciężarowi wypartej wody, gdzie V jest objętością wypartej wody, zaś $\gamma = \rho g$ jest ciężarem właściwym wody. Ponieważ ciężar $P = mg$, gdzie m jest masą ciała (statku), stąd prawo Archimidesa przyjmuje równoważną postać: $m = \rho V$, tj. masa ciała (statku) równa się masie wypartej wody. Ilość wypartej wody przez ciało nazywa się *wypornością*. Ciężar wypartej wody nazywamy *wypornością ciężarową*, masę wypartej wody – *wypornością masową*, a objętość – *wypornością objętościową*. Zazwyczaj mówimy o wyporności bez przymiotnika. Co mamy na myśli, wynika z jednostek, np. statek o wyporności 10000 m^3 oznacza statek, którego wyporność objętościowa $V = 10000 \text{ m}^3$.

Twierdzenie powyższe nie mówi, czy równowaga jest trwała, czy nie. Dla statku dopuszcza się jedynie równowagę trwałą. Mówimy wtedy, że statek (ciało pływające) jest stateczny. Ciało ma równowagę trwałą, gdy po wychyleniu z położenia równowagi

wraca do pierwotnego położenia. Ma to miejsce, gdy po zakłóceniu pojawia się siła lub moment przywracający. Ten ostatni zwany jest w okrętownictwie *momentem prostującym*.

Łatwo jest stwierdzić, że statek nawodny jest stateczny względem zanurzenia. Bowiem wypychając statek głębiej, niż to wynika z prawa Archimidesa, pojawia się dodatkowa siła wyporu $\Delta D = \Delta V \gamma = \gamma A_{WL} \Delta T$, która chce przywrócić statek do pierwotnego zanurzenia. Statek nawodny ma więc wrodzoną stateczność względem zanurzenia. Statek podwodny ma pod tym względem równowagę obojętną, zmiana zanurzenia z powodu braku wodnicy nie skutkuje bowiem zmianą wyporu.

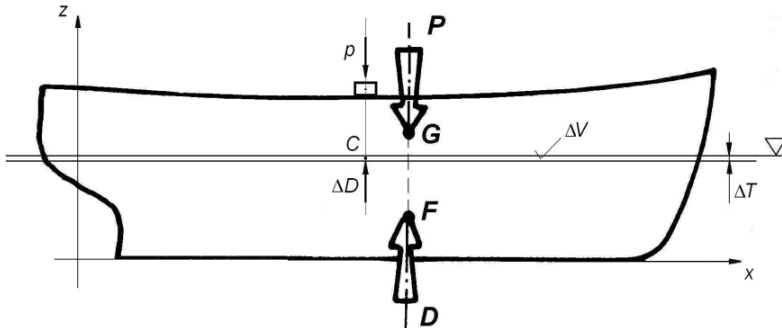
Jeśli zmieni się ciężar statku, np. przez przyjęcie ładunku o ciężarze $p = mg$, musi zwiększyć się wypór statku, a tym samym zanurzenie. Z warunku równowagi wynika, że $D_1 = P_1$, tj. nowy wypór musi równoważyć nowy ciężar statku. Stąd:

$$\gamma(V + \Delta V) = P + p.$$

Zatem: $p = \gamma \Delta V = \gamma A_{WL} \Delta T$, jeśli przyrost zanurzenia odbywa się bez zmiany przegłębienia. Tak więc zmiana zanurzenia ΔT dana jest wzorem:

$$\Delta T = p / \gamma A_{WL} = m / \rho A_{WL}, \quad (7)$$

gdzie A_{WL} jest polem wodnicy, zaś $\Delta V = A_{WL} \Delta T$ jest przyrostem wyporności objętościowej, równym objętości plasterka o grubości ΔT , odciętego przez nową i starą wodnicę (rys. 11). Gdy przyjmujemy ładunek, $p > 0$, gdy zdejmujemy, $p < 0$.



Rys. 11

Z rysunku widać, że dodatkowy wypór przechodzi przez środek ciężkości plasterka, którego odcięta pokrywa się ze środkiem ciężkości wodnicy. Punkt ten, oznaczany przez C , nazywa się *środkiem pływania*. Tak więc, aby statek pogrążył się (lub wynurzył) bez zmiany przegłębienia, przyjęty (lub zdjęty) ciężar musi znajdować na prostej pionowej, przechodzącej przez środek pływania C . W przeciwnym wypadku ciężar p i dodatkowy wypór ΔD będą tworzyły parę sił, która przegłębli statek.

PRZYKŁAD 2. Ze statku stojącego w porcie A o gęstości wody $\rho_1 = 1 \text{ t/m}^3$ zdjęto ładunek o masie $m_1 = 100 \text{ ton}$. Zanurzenie statku zmniejszyło się o $\Delta T_1 = 0,04 \text{ m}$. Następnie statek

wpłynął do portu B o gęstości wody $\rho_2 = 1,025 \text{ t/m}^3$, gdzie przyjęto ładunek o masie $m_2 = 400 \text{ ton}$, co zwiększyło zanurzenie statku o $\Delta T = 0,02 \text{ m}$ w stosunku do zanurzenia pierwotnego w porcie A. Obliczyć wyporność statku przed zdjęciem ładunku w porcie A.

R o z w i ą z a n i e: z prawa Archimiedesa wynika, że:

$$\begin{aligned} V\rho_1 + \Delta m &= (V + \Delta V_3)\rho_2, \\ V(\rho_2 - \rho_1) &= \Delta m - \Delta V_3\rho_2, \end{aligned}$$

gdzie V jest wypornością pierwotną, $\Delta m = m_2 - m_1 = 300 \text{ ton}$ jest zmianą wyporności masy statku, zaś:

$$\Delta V_3 = A_{wL}\Delta T$$

jest przyrostem wyporności objętościowej. Ze względu na małe zmiany zanurzenia możemy przyjąć, że pole wodnicy nie zmienia i równa się:

$$A_{wL} = m_1/\rho_1\Delta T_1.$$

Stąd: $\Delta V_3 = A_{wL}\Delta T = (m_1/\rho_1)\Delta T/\Delta T_1,$

co daje: $\Delta V_3 = 50 \text{ m}^3.$

Zatem: $V = (\Delta m - \Delta V_3\rho_2)/\Delta\rho = 9950 \text{ m}^3.$ ■

Wzór (7) jest ścisły dla statku o burtach pionowych. Dla typowych statków, które mają wręgi rozchylone w częściach końcowych statku, wzór ma zastosowanie, gdy p nie przekracza 10% pierwotnej wyporności.

Dla większych zmian ciężaru nowe zanurzenie statku określa się z pomocą krzywej wyporności $V(z)$ lub $D(z)$, pokazaną na rys. 6. Krzywą tę, z bardzo dobrym przybliżeniem można aproksymować analitycznie, wychodząc od aproksymacji krzywej powierzchni wodnic. Jak widać z rys. 5, krzywa ta ma charakter potęgowy. Cechą charakterystyczną takiej krzywej jest stały współczynnik pełnotliwości krzywej, niezależny od z , którym w tym przypadku jest współczynnik pełnotliwości pionowej κ :

$$\kappa = V/A_{wL}T.$$

Po zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu względem zanurzenia z , otrzymamy:

$$\frac{V'}{V} - \frac{A'}{A} - \frac{1}{z} = 0, \quad (8)$$

gdzie A_{wL} zastąpiliśmy przez A i uwzględniliśmy że $\kappa = \text{const}$. Uwzględniając, że $V' = A$, otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{A'}{A} = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{z}.$$

Po scałkowaniu od zanurzenia początkowego z_0 do z , otrzymamy równanie krzywej powierzchni wodnic w postaci:

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)}.$$

Jak widzimy, jest to parabola stopnia $1/\kappa-1$. By otrzymać krzywą wyporności, do równania (8) należy podstawić A/A_0 , obliczone wcześniej. Otrzymamy równanie:

$$V'/V = (1/\kappa)/z,$$

które po scałkowaniu da krzywą wyporności:

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (9)$$

Biorąc funkcję odwrotną, otrzymamy:

$$\frac{z}{z_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\kappa}.$$

Wynika z niej, że zmiana zanurzenia pod wpływem przyjęcia ładunku wynosi:

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(1 + \frac{p}{D}\right)^{\kappa} - 1. \quad (10)$$

Wzór jest ścisły przy założeniu, że współczynnik pełnotliwości pionowej κ jest stały. Dla rzeczywistych statków zmiany tego współczynnika w obrębie zanurzeń eksploatacyjnych są pomijalnie małe. Stąd też wzór powyższy można stosować praktycznie bez żadnych ograniczeń co do wielkości ładunku; T i D oznaczają pierwotne zanurzenie i wypór, przed przyjęciem (zdjęciem) ładunku.

Rozwijając wzór (10) i biorąc tylko część liniową, tj. dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia, zredukuje się do wzoru (7) dla statku o burtach pionowych. Można podać jeszcze dokładniejsze przybliżenie wzoru (10), jeśli zlogarytmujemy go stronami wg wzoru na $\ln x = 2(x-1)/(x+1)$. Otrzymamy wzór:

$$\Delta T_2 = \frac{\Delta T_1}{1 + \frac{1-\kappa}{2} \frac{p}{D}}, \quad (11)$$

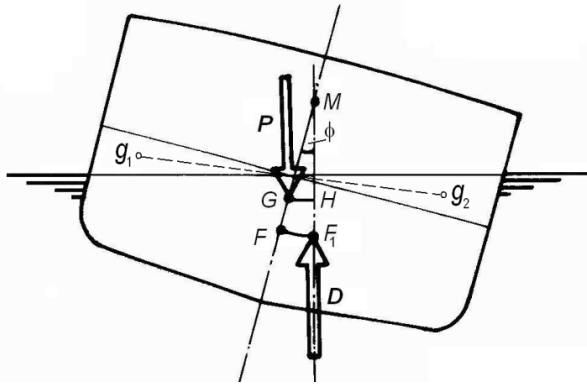
gdzie ΔT_1 , obliczone wg wzoru (7), jest pierwszym przybliżeniem, zaś ΔT_2 jest drugim przybliżeniem zmiany zanurzenia.

Warunek równowagi trwałej względem obrotu nie jest tak oczywisty, jak dla zanurzenia. By stwierdzić, czy statek jest stateczny względem obrotu, musimy wychylić go z położenia równowagi i dokonać analizy sił. Wiemy, że siła ciężkości i siła wyporu działają wzdłuż linii pionowych, przechodzących przez środek ciężkości statku i środek wyporu. Obie są równe sobie i przeciwnie skierowane. Środek ciężkości nie zmienia położenia w układzie związanym ze statkiem, natomiast środek wyporu przemieszcza

się po krzywej zwanej *krzywą środków wyporu*. Po przechylenie siła ciężkości i siła wyporu nie będą więc działały wzdłuż jednej prostej pionowej, tworząc parę sił, która chce prostować statek (rys. 12). Stąd moment tej pary sił nazywa się *momentem prostującym*, a jej ramię GH – *ramieniem prostującym* l .

Na nieskończenie małym odcinku każdą krzywą można traktować jako łuk okręgu o pewnym promieniu, zwanym *promieniem krzywizny*, a środek okręgu nazywa się *środkiem krzywizny*. W okrętownictwie promień krzywizny krzywej środków wyporu nazywa się *promieniem metacentrycznym*, oznaczanym przez r , a środek krzywizny – *metacentrum*, oznaczanym przez M .

Metacentrum podczas przechylania wędruje po pewnej krzywej zwanej *ewolutą metacentryczną*. Metacentrum początkowe M_0 znajduje się w PS, gdzie zaczyna się ewoluta. Statek jest więc stateczny, jeśli metacentrum początkowe M_0 znajduje się nad środkiem ciężkości G . Odległość metacentrum początkowego od środka ciężkości nazywa się (początkową) *wysokością metacentryczną*, oznaczaną przez h_0 . Tak więc w położeniu wyprostowanym statek posiada równowagę trwałą, jeśli początkowa wysokość metacentryczna $h_0 \equiv GM_0 > 0$. Im większe jest h_0 , tym większa jest stateczność (początkowa) statku. Gdy $h_0 < 0$, to statek (ciało) nie może pływać w położeniu wyprostowanym: przechyli się lub przewróci.



Rys. 12. Mechanizm momentu prostującego

Z rys. 12 wynika, że początkowa wysokość metacentryczna wyraża się wzorem:

$$h_0 = z_F + r_0 - z_G, \quad (12)$$

gdzie z_F i z_G to rzędna środka wyporu w położeniu wyprostowanego okrętu i rzędna środka ciężkości, zaś r_0 jest początkowym promieniem metacentrycznym. By określić początkową wysokość metacentryczną h_0 , musimy umieć określać te trzy wielkości w powyższym wzorze. Pierwszą i trzecią wielkość, czyli rzędna środka wyporu z_F i rzędna środka ciężkości z_G umiemy obliczać. Nową wielkością, której nie umiemy obliczać, jest początkowy promień metacentryczny r_0 .

Podczas przechylania statku środek wyporu przemieszcza się z powodu zmiany kształtu podwodnej części kadłuba. Sieczna FF_1 na rys. 12 jest równoległa do prostej łączącej środki ciężkości klina wynurzonego i zanurzonego g_1g_2 , co wynika z twierdzenia o przesuwaniu mas. Jeśli zwiększymy przechył o $d\phi$, środek wyporu przemieści się w nowe położenie F_2 , niepokazane na rys. 12. Pojawia się nowe wąskie kliny. Sieczna F_1F_2 będzie równoległa do prostej łączącej środki ciężkości nowego klina wynurzonego i zanurzonego $g'_1g'_2$. Gdy $d\phi \rightarrow 0$, prosta $g'_1g'_2$ pokryje się z wodnicą nachyloną pod kątem ϕ , a sieczna F_1F_2 przejdzie w styczną do środka wyporu w punkcie F_1 . Styczna do krzywej środków wyporu w punkcie F odpowiadającym kątowi ϕ jest więc równoległa do odpowiadającej wodnicy nachylonej pod kątem ϕ , czyli ma nachylenie takie, jak odpowiadająca wodnica. Inaczej mówiąc, styczna do krzywej środków wyporu śledzi wodnicę.

By znaleźć sieczną F_1F_2 , musimy przywołać twierdzenie Pappusa-Guldina, znane z mechaniki technicznej. Dotyczy ono charakterystyk objętości powstałej przez obrót płaskiej powierzchni S wokół dowolnej prostej ξ leżącej w tej samej płaszczyźnie, co obracana powierzchnia (rys. 13). Gdy kąt obrotu wokół osi ξ wynosi $\alpha = 2\pi$, powstanie bryła osio-symetryczna, zwana *torusem*, którego przekrojem poprzecznym jest obracana powierzchnia S , a gdy obrócimy tę powierzchnię o niewielki kąt α , powstanie *klin*. Powstała bryła ma następujące charakterystyki: objętość:

$$v = \alpha \int_A \eta dA = \alpha S \xi,$$

moment statyczny objętości względem osi ξ :

$$S_{v\xi} = \alpha \int_A \eta^2 dA = \alpha J_{\xi},$$

moment statyczny objętości względem osi η :

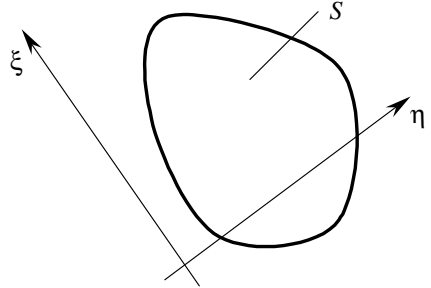
$$S_{v\eta} = \alpha \int_A \xi \eta dA = \alpha J_{\xi\eta},$$

moment statyczny objętości względem płaszczyzny $\xi\eta$:

$$S_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \alpha^2 \int_A \eta^2 dA = \frac{1}{2} \alpha^2 J_{\xi},$$

moment bezwładności objętości osi ξ :

$$J_v = \alpha \int_A \eta^3 dA \quad \text{itd.}$$



Rys. 13

W przypadku klina, oś obrotu ξ nie musi znajdować się na zewnątrz powierzchni S . Punkty leżące po drugiej stronie osi obrotu mają wtedy współrzędne $\eta < 0$. Najważniejsze są cztery pierwsze charakterystyki: objętość klina v oraz momenty statyczne objętości klina względem osi układu i płaszczyzny startowej, dane wzorami:

$$v = \alpha S \xi, \quad S_{v\xi} = \alpha J_{\xi}, \quad S_{v\eta} = \alpha J_{\xi\eta}, \quad S_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \alpha^2 J_{\xi}, \quad (13)$$

gdzie α jest kątem obrotu powierzchni S wokół osi ξ , zaś S_ξ i J_ξ są to odpowiednio moment statyczny i moment bezwładności powierzchni S względem osi obrotu ξ . Wzory powyższe znane są jako twierdzenie Pappusa-Guldina.

W okrętownictwie powierzchnią obracaną jest wodnica w wyniku przyłożenia momentu przechylającego. Moment nie zmienia siły wyporu, dlatego w statyce okrętu mówimy o przechyłach *równoobjętościowych*. Oznacza to, że objętość klina wynurzonego v_1 i zanurzonego v_2 jest taka sama, co daje objętość sumaryczną klina $v = v_1 + v_2 = 0$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy moment statyczny wodnicy względem osi obrotu ξ zeruje się, czyli gdy $S_\xi = 0$. A to jest możliwe, gdy (chwilowa) oś obrotu ξ , zwana *osią pływania*, przechodzi przez środek ciężkości wodnicy C , zwany środkiem pływania. Jest to *twierdzenie Eulera* o wodnicach równoobjętościowych: dwie wodnice równoobjętościowe, nachylone względem siebie pod nieskończenie małym kątem, przecinają się wzdłuż osi przechodzącej przez ich środek ciężkości.

Generalnie, podczas przechylania okrętu środek pływania przemieszcza się wzdłuż krzywej, zwaną *krzywą środków pływania*. Twierdzenie Eulera nie mówi, jak jest zorientowana oś pływania, o czym dowiemy się później.

Teraz możemy skorzystać z twierdzenia o przesuwaniu mas. Twierdzenie to mówi, że gdy w układzie mas przemieścimy pewną masę Δm o wektor $\mathbf{e}$, to moment statyczny przemieszczenia tej masy jest taki sam, jak moment statyczny przemieszczenia całego układu, tj. $m\Delta\mathbf{r}_c = \Delta m\mathbf{e}$, gdzie m jest całą masą, zaś $\Delta\mathbf{r}_c$ jest wektorem przemieszczenia środka ciężkości całego układu mas. Z twierdzenia tego wynika, że $\Delta\mathbf{r}_c \parallel \mathbf{e}$. Ma ono zastosowanie także do przesuwania objętości, jak na rys. 12. Mianowicie:

$$V|FF_1| = v|g_1g_2|,$$

gdzie $v|g_1g_2| = S_v$ jest momentem statycznym przemieszczenia klina. Wykorzystując wzór (13), otrzymamy:

$$\begin{aligned} V|FF_1| &= \phi J_\xi, \\ |FF_1|/\phi &= J_\xi/V, \end{aligned}$$

gdzie kąt α zastąpiliśmy kątem ϕ . Z rys. 12 widać, że w granicy iloraz $|FF_1|/\phi = FM_0$ jest początkowym promieniem metacentrycznym r_0 . Stąd:

$$r_0 = J_x/V. \quad (14)$$

Początkowy promień metacentryczny r_0 równa się ilorazowi poprzecznego momentu bezwładności wodnicy J_x i objętości zanurzonej części kadłuba (wyporności) V . W ten sposób znamy wszystkie elementy występujące we wzorze (12) na początkową wysokość metacentryczną h_0 . Jeśli $h_0 > 0$, statek posiada równowagę trwałą i może pływać w położeniu wyprostowanym.

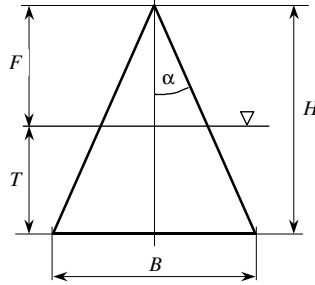
Wzór (12) zapisuje się czasami w postaci: $h_0 = r_0 - a$, gdzie $a = z_G - z_F$ jest wzniosem środka ciężkości statku nad środkiem wyporu. Gdy nie ma wodnicy pływania, jak to jest w przypadku okrętów podwodnych w zanurzeniu, promień metacentryczny ze-

ruje się: $r_0 = 0$. W takim przypadku, $h_0 = -a$. By okręt był stateczny $-a > 0$, skąd $z_G < z_F$, tj. środek ciężkości G musi być poniżej środka wyporu F .

PRZYKŁAD 3. Kiedy jednorodna belka pryzmatyczna, której przekrojem poprzecznym jest trójkąt równoramienny o kącie rozwarcia 2α (rys. 14), może pływać wierzchołkiem do góry, a kiedy wierzchołkiem do dołu?

R o z w i ą z a n i e. Ciężar ciała $P = V_c \gamma_c$, zaś wypór $D = V \gamma = (V_c - V_r) \gamma$. Ponieważ $P = D$, mamy równanie $V_c \gamma_c = (V_c - V_r) \gamma$, z którego wynika: $V_r/V_c = 1 - \rho_c/\rho$. Stosunek objętości $V_r/V_c = (F/H)^2$ jest drugą potęgą skali F/H . Uwzględniając dodatkowo przykład na s. 12, warunek pływania daje związek:

$$\begin{aligned} (T/H)^2 &= \rho_c/\rho, & \text{gdy belka pływa wierzchołkiem do dołu,} \\ (F/H)^2 &= 1 - \rho_c/\rho, & \text{gdy pływa wierzchołkiem do góry.} \end{aligned}$$



Rys. 14. Belka pryzmatyczna

Nie wiemy jednak, czy w danej pozycji będzie występowała równowaga trwała belki. Jest ona możliwa, gdy początkowa wysokość metacentryczna, dana wzorem (12), będzie dodatnia: $h_0 > 0$.

Dla belki pływającej wierzchołkiem do dołu, $z_F = \frac{2}{3}T$, $z_G = \frac{2}{3}H$, gdyż środek ciężkości trójkąta znajduje się w $\frac{2}{3}$ wysokości od wierzchołka, a promień metacentryczny r_0 dany jest wzorem (14). Wodnica jest prostokątna, dla której moment bezwładności $J_x = \frac{1}{12}LB'^3$, zaś wyporność ciała cylindrycznego, o stałym przekroju równa się $V = LA$, gdzie $B' = 2T \tan \alpha$ jest szerokością wodnicy, L jest długością belki, zaś A jest polem zanurzonej części wręgu. Zatem:

$$r_0 = \frac{\frac{1}{12}LB'^3}{LA} = \frac{\frac{1}{12}B'^3}{A} = \frac{\frac{1}{12}B'^3}{\frac{1}{2}B'T} = \frac{1}{6} \frac{B'^2}{T} = \frac{2}{3} T \tan^2 \alpha.$$

Jak widać, dla ciała cylindrycznego promień metacentryczny r_0 nie zależy od długości ciała.

Zatem, gdy belka pływa wierzchołkiem do dołu, $h_0 = \frac{2}{3}T(1 + \tan^2 \alpha) - \frac{2}{3}H$. Uwzględniając tożsamość trygonometryczną $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$, otrzymamy ostatecznie:

$$h_0 = \frac{2}{3}(T/\cos^2 \alpha - H).$$

Dodatnia wysokość metacentryczna występuje, gdy $T/\cos^2 \alpha > H$, czyli gdy $1/\cos^2 \alpha > H/T$. Biorąc odwrotność ostatniej nierówności, warunek równowagi trwałej przy pływaniu krawędzią do dołu przyjmie ostatecznie postać:

$$\cos^2 \alpha < T/H.$$

Obliczenie początkowej wysokości metacentrycznej h_0 dla belki pływającej wierzchołkiem do góry jest trudniejsze, gdyż część zanurzona wręgu nie jest trójkątem.

Rzędną środka wyporu znajdziemy za pomocą całkowitego pola wręgu A_c i pola części wystającej nad poziom wody A_r . Mianowicie:

$$z_F = \frac{A_c \frac{1}{3}H - A_r \left(H - \frac{2}{3}F\right)}{A_c - A_r}.$$

Z kolei promień metacentryczny:

$$r_0 = \frac{\frac{1}{12}B'^3}{A} = \frac{\frac{1}{12}B'^3}{A_c - A_r}.$$

Uwzględniając, że $z_G = \frac{1}{3}H$, stąd:

$$h_0 = \frac{A_c \frac{1}{3}H - A_r \left(H - \frac{2}{3}F\right)}{A_c - A_r} + \frac{\frac{1}{12}B'^3}{A_c - A_r} - \frac{1}{3}H.$$

Mnożąc stronami przez $A_c - A_r$, po przeprowadzeniu redukcji otrzymamy:

$$h_0(A_c - A_r) = \frac{2}{3}FA_r + \frac{1}{12}B'^3 - \frac{2}{3}HA_r.$$

Dzieląc stronami przez A_r oraz uwzględniając podobieństwo trójkątów, otrzymamy:

$$h_0[(H/F)^2 - 1] = \frac{2}{3}F + \frac{2}{3}F \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2}{3}H,$$

gdzie dodatkowo uwzględniliśmy wzór na promień metacentryczny trójkąta, zastępując zanurzenie T przez wolną burtę F . Wyrażenie po prawej stronie równa się $\frac{2}{3}F(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \frac{2}{3}H$. Zatem wysokość metacentryczna belki dla pływania wierzchołkiem do góry przyjmuje ostatecznie postać:

$$h_0[(H/F)^2 - 1] = \frac{2}{3}(F/\cos^2 \alpha - H).$$

Dodatnia wysokość metacentryczna występuje, gdy $\cos^2 \alpha < F/H$.

Przy pływaniu wierzchołkiem do góry $(F/H)^2 = 1 - \rho_c/\rho$, a wierzchołkiem do dołu $(T/H)^2 = \rho_c/\rho$. Tak więc belka ma równowagę trwałą, gdy:

$$\begin{aligned} \cos^4 \alpha < 1 - \rho_c/\rho, & \quad \text{gdy pływa wierzchołkiem do góry,} \\ \cos^4 \alpha < \rho_c/\rho, & \quad \text{gdy pływa wierzchołkiem do dołu.} \end{aligned}$$

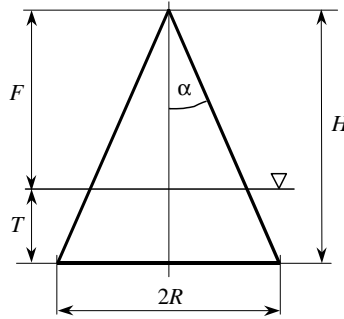
O równowadze trwałej decyduje zatem kąt rozwarcia i stosunek gęstości.

Przykładowo, gdy $\rho_c/\rho = 0,64$, warunek $\cos \alpha < 0,36^{1/4}$ daje kąt $\alpha > 39,23^\circ$ dla belki pływającej wierzchołkiem do góry, a dla pływającej wierzchołkiem do dołu warunek $\cos \alpha < 0,64^{1/4}$ daje kąt $\alpha > 26,57^\circ$. Warunki równowagi podają minimalne kąty rozwarcia. Gdy $\rho_c/\rho > \frac{1}{2}$, bardziej trwała równowaga jest przy pływaniu wierzchołkiem do dołu. ■

PRZYKŁAD 4. Kiedy jednorodny stożek o kącie rozwarcia 2α (rys. 15) może pływać wierzchołkiem do góry, a kiedy wierzchołkiem do dołu?

R o z w i ą z a n i e. Wprowadzając analogiczne oznaczenia, jak poprzednio, ciężar ciała $P = V_c \gamma_c$, zaś wypór $D = V \gamma = (V_c - V_r) \gamma$ w pozycji wierzchołkiem do góry. Ponieważ $P = D$, stąd: $V_r/V_c = 1 - \rho_c/\rho$, gdzie stosunek objętości $V_r/V_c = (F/H)^3$ jest trzecią potęgą skali F/H . Warunek pływania daje więc związek:

$$\begin{aligned} (F/H)^3 &= 1 - \rho_c/\rho, & \text{dla pływania wierzchołkiem do góry,} \\ (T/H)^3 &= \rho_c/\rho, & \text{dla pływania wierzchołkiem do dołu.} \end{aligned}$$



Rys. 15. Stożek

Przykładowo, gdy $\rho_c/\rho = 0,64$, to dla belki pływającej wierzchołkiem do dołu: $T/H = 0,64^{1/3} = 0,862$, a dla belki pływającej wierzchołkiem do góry: $F/H = 0,36^{1/3} = 0,711$, tj. $T/H = 0,289$ (rys. 15).

Pływanie będzie stabilne, gdy początkowa wysokość metacentryczna, dana wzorem (12), będzie dodatnia: $h_0 > 0$.

Dla stożka pływającego wierzchołkiem do dołu, $z_F = \frac{3}{4}T$, $z_G = \frac{3}{4}H$. Wodnicą jest koło o promieniu r . Moment bezwładności koła $J_x = \frac{1}{4}\pi r^4$, zaś objętość stożka czy ostrosłupa równa się $\frac{1}{3}$ iloczynu pola podstawy i wysokości. Stąd:

$$r_0 = \frac{J_x}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{\frac{1}{3}\pi r^2 T} = \frac{3}{4} \frac{r^2}{T} = \frac{3}{4} T \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Dodając wyżej wymienione elementy stateczności, otrzymamy: $h_0 = \frac{3}{4}T(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \frac{3}{4}H$. Zatem: $h_0 = \frac{3}{4}(T/\cos^2 \alpha - H)$. Dodatnia wysokość metacentryczna występuje, gdy $T/\cos^2 \alpha > H$, czyli gdy $\cos^2 \alpha < T/H$, jak w przypadku belki.

Dla stożka pływającego wierzchołkiem do góry charakterystyki stateczności znajdziemy za pomocą całkowitej objętości stożka V_c i objętości wystającej nad poziom wody V_r .

$$z_F = \frac{V_c \frac{1}{4} H - V_r (H - \frac{3}{4} F)}{V_c - V_r}.$$

Uwzględniając, że $z_G = \frac{1}{4}H$, otrzymamy:

$$h_0 = \frac{V_c \frac{1}{4} H - V_r (H - \frac{3}{4} F)}{V_c - V_r} + \frac{J_x}{V_c - V_r} - \frac{1}{4} H.$$

Mnożąc stronami przez wyporność $V_c - V_r$, po przeprowadzeniu redukcji otrzymamy:

$$h_0(V_c - V_r) = \frac{3}{4} V_r F + J_x - \frac{3}{4} V_r H.$$

Dzieląc stronami przez V_r oraz uwzględniając podobieństwo brył, otrzymamy:

$$h_0[(H/F)^3 - 1] = \frac{3}{4} F + \frac{3}{4} F \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{3}{4} H,$$

gdzie dodatkowo uwzględniliśmy wzór na promień metacentryczny stożka, zastępując zanurzenie T przez wolną burtę F . Ostatecznie, wysokość metacentryczna stożka dla pływania wierzchołkiem do góry przyjmuje postać: $h_0[(H/F)^3 - 1] = \frac{3}{4}(F/\cos^2 \alpha - H)$. Dodatnia wysokość metacentryczna występuje, gdy $\cos^2 \alpha < F/H$, jak w przypadku belki.

Uwzględniając warunki pływalności, stożek będzie pływał stabilnie, gdy:

$$\begin{aligned} \cos^6 \alpha &< 1 - \rho_c / \rho, & \text{dla pływania wierzchołkiem do góry,} \\ \cos^6 \alpha &< \rho_c / \rho, & \text{dla pływania wierzchołkiem do dołu.} \end{aligned}$$

Przykładowo, gdy $\rho_c / \rho = 0,64$, kąt $\alpha > 32,50^\circ$ dla stożka pływającego wierzchołkiem do góry, w przeciwnym wypadku kąt $\alpha > 21,83^\circ$. ■

W przypadku przegłębień, środek wyporu przemieszcza się wzdłuż krzywej środków wyporu leżącej w PS. Początkowy promień metacentryczny dla przegłębień, oznaczany przez R , dany jest analogicznym wzorem, jak dla przechyłów poprzecznych, tj.:

$$R_0 = J_L / V,$$

gdzie J_L jest wzdłużnym momentem bezwładności wodnicy względem osi y , przechodzącej przez środek ciężkości (środek pływania C), tj. wzdłużnym centralnym momentem bezwładności. Ponieważ wzdłużny moment bezwładności jest wielokrotnie większy od poprzecznego, to samo dotyczy promieni metacentrycznych, tj. wzdłużny promień jest wielokrotnie większy od poprzecznego $R_0 \gg r_0$. Można łatwo oszacować, że stosunek obu promieni $R_0 / r_0 \approx (L/B)^2 = 35 \div 60$. Z tego względu, ten pierwszy nazywany jest *dużym* promieniem metacentrycznym, a drugi – *małym*.

Podobnie wzdłużna wysokość metacentryczna, nazywana dużą wysokością metacentryczną, oznaczana przez H_0 , wyraża się analogicznym wzorem, jak mała wysokość metacentryczna: $H_0 = R_0 - a$, w którym mały promień został zastąpiony dużym. Ponieważ $a = z_G - z_F$ jest pomijalnie małe w stosunku do R_0 , stąd: $H_0 \approx R_0$.

W przypadku małych kątów przechyłu można zaniedbać przemieszczanie się metacentrum. Jeśli przyjąć, że metacentrum jest stałe, z rys. 12 natychmiast mamy, że ramię prostujące pary sił równa się $l = h_0 \sin \phi$. Dla małych kątów $\sin \phi \approx \phi$ w radianach, stąd ramię prostujące wyraża się wzorem $l \approx h_0 \phi$, zwanym *wzorem metacentrycznym*. Równowaga następuje, gdy moment przechylający M_p równa się momentowi prostującemu

DI. Tak więc w położeniu równowagi $M_p = DI$. Dzieląc je przez wypór D , otrzymamy równanie na kąt równowagi, wywołany momentem przechylającym:

$$l_p = h_0 \phi, \quad (15)$$

gdzie $l_p \equiv M_p/D$ jest ramieniem przechylającym. W przypadku momentów przegłębiających, równanie to przybiera postać: $M_p \approx DR_0 \theta = \gamma J_L \theta$.

W przypadku przegłębień, kąty są bardzo małe, dlatego wygodniej jest posługiwać się przegłębieniem $t \equiv T_d - T_r$, rozumianym jako różnica zanurzeń na dziobie i rufie. Wprowadzając kąt $\theta = (t - t_k)/L_{pp}$ (rys. 2), gdzie t_k jest przegłębieniem konstrukcyjnym, otrzymamy równanie na przegłębienie $t - t_k$:

$$M_p = (\gamma J_L / L_{pp})(t - t_k) = M_j(t - t_k), \quad (16)$$

gdzie $M_j \equiv \gamma J_L / L_{pp}$ [Nm/m] jest *jednostkowym momentem przegłębiającym*, tj. momentem przegłębiającym statek o jeden metr. Charakterystyka ta podawana jest na krzywych hydrostatycznych, często podzielona przez 100, czyli jako moment przegłębiający o 1 cm, w Nm/cm. Kąt θ jest kątem nachylenia wodnicy względem PP; $\theta > 0$, gdy przegłębienie jest na dziób (na rys. 2 przegłębienie jest ujemne).

Moment przechylający pochodzi zwykle od działania wiatru lub przesunięcia ładunku w płaszczyźnie wręgowej, a moment przegłębiający – od wzdłużnego przesunięcia ładunku. Stosując twierdzenie o przesuwaniu siły, znane ze statyki, momenty przechylające M_p , związane z przesuwaniem ciężaru, przy założeniu małych kątów, są równe odpowiednio $p\Delta y$ i $p\Delta x$, gdzie p jest przesuwany ciężarem, a Δy i Δx są składowymi przemieszczenia ciężaru. Tak więc ramię przechylające $l_p = p\Delta y/D = m\Delta y/M$.

Podobnie przegłębienie można wyrazić w kategoriach mas:

$$t - t_k = M_p/M_j = p\Delta x/(\gamma J_L / L_{pp}) = m\Delta x/S_j, \quad (17)$$

gdzie $S_j = \rho J_L / L_{pp}$ [tm/m] jest jednostkowym statycznym momentem przemieszczenia masy, przegłębiającym statek o jeden metr.

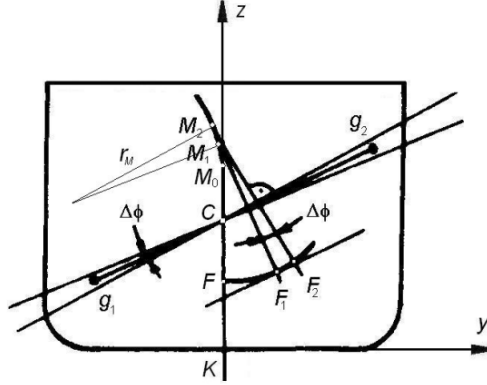
§ 8. Charakterystyki hydrostatyczne kadłuba

Jest wiele charakterystyk hydrostatycznych kadłuba, jak krzywa środków wyporu, ewoluta metacentryczna, biegunowy i kartezjański wykres ramion prostujących, krzywa środków pływania itp. Omówimy je po kolei.

a) Krzywa środków wyporu

Gdy do statku przyłożymy moment przechylający, nastąpi przechył, przy którym moment przechylający równoważy się z momentem prostującym. W trakcie przechylania wyporność statku nie zmienia się, tj. $V = \text{const}$, stąd mówimy o przechyłach równoobjętościowych, zaś środek wyporu F wędruje po krzywej środków wyporu (rys. 16). Z rysunku natychmiast wynika, że styczna do krzywej środków wyporu w dowolnym punkcie

jest równoległa do odpowiadającej wodnicy. Tym samym, prosta prostopadła do stycznej jest normalna do wodnicy; pokrywa się jednocześnie z linią działania siły wyporu D . Promień krzywizny krzywej środków wyporu, tj. promień metacentryczny, dany jest wzorem $r = J/V$, gdzie J jest momentem bezwładności wodnicy przechylonej. Dla zadanej wyporności V , promień metacentryczny $r = r(\phi)$ jest funkcją kąta przechyłu, wynikającą ze zmian momentu bezwładności wodnicy. Zakładamy tu, że statek nie zmienia przegłębienia podczas przechylania.



Rys. 16

Współrzędne środka wyporu y i z mają bezpośredni związek z przebiegiem promieni metacentrycznych $r = r(\phi)$. Z rys. 16 wynika, że element łuku krzywej środków wyporu $ds = r d\phi$. Rzutując ten element na osie układu, otrzymamy:

$$\begin{aligned} dy &= ds \cos \phi = r \cos \phi d\phi, \\ dz &= ds \sin \phi = r \sin \phi d\phi. \end{aligned}$$

Całkując stronami od położenia wyprostowanego do zadanego przechyłu, otrzymamy:

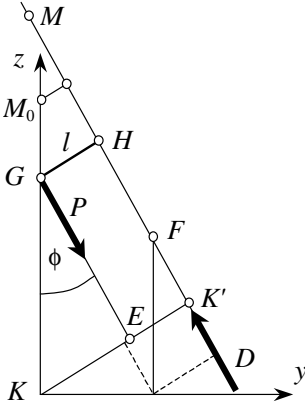
$$\begin{aligned} y &= \int_0^\phi r \cos \phi d\phi, \\ z &= z_0 + \int_0^\phi r \sin \phi d\phi, \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie z_0 jest rzędną środka wyporu w położeniu wyprostowanym, zaś ϕ jest niemią zmienną całkowania.

b) Ewoluta metacentryczna

Środek krzywizny krzywej środków wyporu, tj. metacentrum, przemieszcza się po ewolucie metacentrycznej. Krzywa środków wyporu względem ewoluty metacentrycznej jest ewolwentą (krzywą rozwiniętą). Normalna do krzywej środków wyporu jest styczna do ewoluty metacentrycznej i punkt styczności wypada w metacentrum. Ponieważ styczna do krzywej środków wyporu jest równoległa do wodnicy, przemieszczenie ds wzdłuż

ewoluty wynika wyłącznie ze zmiany promienia metacentrycznego dr , tj. $ds = dr$. Stąd natychmiast mamy, że promień krzywizny ewoluty metacentrycznej $r_M = dr/d\phi$ równa się pochodnej promienia metacentrycznego względem kąta przechyłu (rys. 16).



Rys. 17. Para sił

Siła wyporu działa wzdłuż prostej przechodzącej przez środek wyporu, prostopadłej do wodnicy. Oznacza to, że działa wzdłuż promienia metacentrycznego i jest styczna do ewoluty metacentrycznej. Znajomość współrzędnych środka wyporu $F(y, z)$ determinuje linię działania siły wyporu, a tym samym określa położenie metacentrum oraz ramię prostujące pary sił. Współrzędne metacentrum wynikają wprost z rys. 16:

$$\begin{aligned} y_M &= y - r \sin \phi, \\ z_M &= z + r \cos \phi. \end{aligned}$$

c) Ramiona pary sił

Do znalezienia ramienia prostującego $l \equiv GH$, pokazanego na rys. 12, posłużymy się rys. 17. Linia działania siły wyporu przechodzi przez środek wyporu F i jest nachylona pod kątem ϕ względem PS. Na linii tej znajduje się metacentrum M , oddalone od środka wyporu F o promień metacentryczny r . Środek ciężkości G znajduje się w PS i nie zmienia swego położenia w trakcie przechylania okrętu. Siła ciężkości zaczepiona jest w punkcie G i jest równoległa do linii działania siły wyporu. Ramie pary sił można przedstawić jako różnicę ramienia siły wyporu i ramienia siły ciężkości, liczonych względem obranego bieguna. Za biegun przyjmuje się najczęściej najniższy punkt owręza, oznaczany przez K , a także środek wyporu F w położeniu wyprostowanym, punkt przecięcia się wodnicy w położeniu wyprostowanym z osią z oraz metacentrum początkowe M_0 .

Ramię siły wyporu względem wybranego bieguna nazywa się *ramieniem kształtu* i oznacza przez l_k , a ramię siły ciężkości nazywa się *ramieniem ciężaru* i oznacza przez l_c . Zatem: $l = l_k - l_c$. Przyjmując za biegun punkt K , bezpośrednio z rys. 17 wynika, że:

$$l_k = y \cos \phi + z \sin \phi, \quad l_c = z_G \sin \phi.$$

Do znalezienia ramienia kształtu wystarczają współrzędne środka wyporu (y, z) , zaś ramię ciężaru zależy od wzniosu środka ciężkości statku $z_G \equiv KG$. Zatem:

$$l = y \cos \phi + z \sin \phi - z_G \sin \phi. \quad (19)$$

Miarą szybkości wzrastania ramion prostujących w funkcji kąta przechyłu ϕ jest odcinek MH , zwany *wysokością metacentryczną*, oznaczany przez h . Z rys. 18 wprost widać, że przyrost ramienia prostującego, tj. składowej poziomej przemieszczenia punktu H wynosi $dl = h d\phi$. Stąd:

$$dl/d\phi = h,$$

czyli pochodna krzywej ramion jest równa wysokości metacentrycznej $h \equiv MH$.

Z kolei zmiana długości odcinka MH , czyli wysokości metacentrycznej h , jest wynikiem pionowego przemieszczenia metacentrum M i składowej pionowej przemieszczenia punktu H . Z rysunku widać, że to pierwsze przemieszczenie jest równe dr , a to drugie $ld\phi$. Zatem: $dh = dr - ld\phi$. Stąd:

$$h' \equiv l'' = r' - l,$$

gdzie $'$ oznacza różniczkowanie względem ϕ . Wzory powyższe pozwalają obliczyć dowolną pochodną krzywej ramion. Stosując sukcesywne różniczkowanie, otrzymamy pochodne dowolnych rzędów, co pozwala rozwijać krzywą ramion w szereg Maclaurina:

$$\begin{aligned} l''' &= r'' - h, \\ l^{IV} &= r''' - r' + l, \\ l^V &= r^{IV} + r'' + h. \end{aligned}$$

Pierwszym wyrazem tego rozwinięcia jest wzór metacentryczny $l = h_0\phi$.

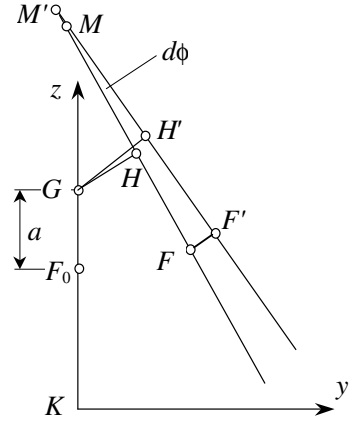
Obliczmy jeszcze zmianę odcinka HF , czyli zmianę pionowej odległości między środkiem ciężkości i środkiem wyporu. Punkt H przemieszcza się w pionie (wzdłuż linii działania siły wyporu) o odcinek $ld\phi$, natomiast środek wyporu przemieszcza się poziomo, dlatego nie ma składowej pionowej. Stąd: $d(HF) = ld\phi$. Całkując w granicach od $\phi = 0$ do danego ϕ , otrzymamy:

$$HF - a = \int_0^\phi ld\phi \equiv l_d, \quad (20)$$

gdzie $a = (HF)_{\phi=0} = F_0G$ jest wzniosem środka ciężkości nad środkiem wyporu w położeniu wyprostowanym statku. Lewa strona wzoru przedstawia przyrost pionowej odległości między środkiem ciężkości i środkiem wyporu, wywołany przechyleniem statku. Ten przyrost równa się polu pod krzywą ramion do danego kąta przechyłu, zwanemu *ramieniem dynamicznym*. Inaczej mówiąc, ramię dynamiczne jest krzywą całkową krzywej ramion prostujących, zależną od górnej granicy całkowania. Jeśli równanie (20) pomnożyć stronami przez wypór D , wyrazi zasadę zachowania prac: praca potrzebna na rozsuniecie obu sił jest równa pracy momentu prostującego.

Odcinek HF ma duże znaczenie praktyczne. Z jego pomocą można wyrazić zarówno ramię dynamiczne $l_d = HF - a$, jak i wysokość metacentryczną $h = r - HF$. Odcinek ten definiują współrzędne środka wyporu. Rzutując współrzędne na linię działania siły wyporu, bezpośrednio z rys. 17 otrzymamy:

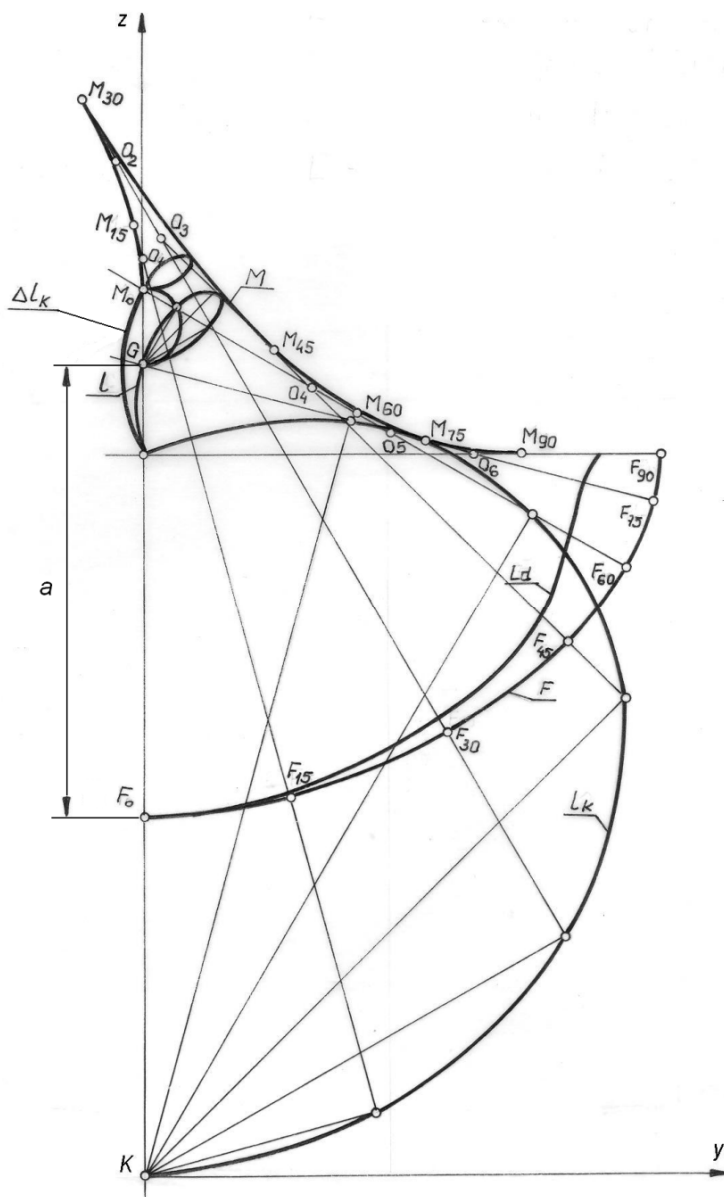
$$HF = y \sin \phi - z \cos \phi + z_G \cos \phi. \quad (21)$$



Rys. 18

d) Wykres biegunowy ramion

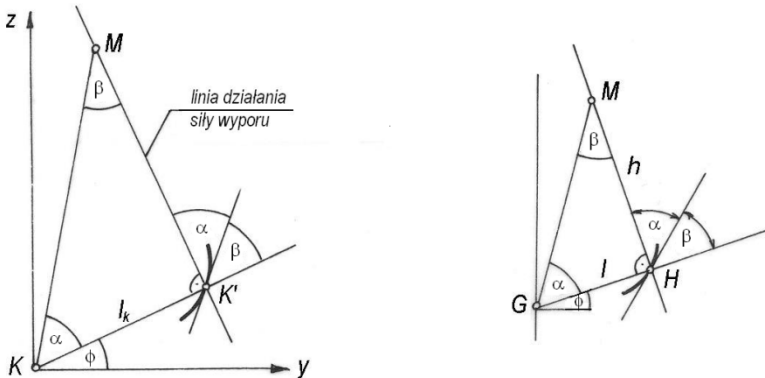
W układzie biegunowym wykresem ramion prostujących l jest krzywa będąca miejscem geometrycznym punktów H (rys. 19), a wykresem ramion kształtu l_k – miejsce geometryczne punktów K' , będących rzutami punktu K (ogólnie punktu referencyjnego) na linie działania siły wyporu.



Rys. 19. Wykres biegunowy ramion siły wyporu

Żaden z tych wykresów nie może przecinać ewoluty metacentrycznej, ale musi być do niej styczny. Punkt styczności wyznacza maksymalne ramię, gdyż wówczas pochodna ramienia $l (=HM)$, czy ramienia $l_k (=K'M)$ zeruje się, co widać z rysunku.

Bardzo łatwo jest znaleźć kąty, pod którymi wykres biegunowy ramion siły wyporu przecina się z linią działania siły wyporu oraz z prostą pokrywającą się z ramieniem. Konstrukcja ta pokazana jest na rys. 20.



Rys. 20. Własności krzywej biegunowej ramion siły wyporu

Uzasadnienie tej konstrukcji jest bardzo proste. Wystarczy narysować linię działania siły wyporu pod kątem $\phi + d\phi$ i znaleźć nowy punkt H , jak na rys. 18. Wówczas będzie widać, że przemieszczenie punktu H odbywa się wzdłuż stycznej do wykresu. Składowa tego przemieszczenia wzdłuż ramienia wynosić będzie $hd\phi$, a wzdłuż linii działania siły wyporu $ld\phi$. Zatem: $\tan \beta = l/h$, czyli kąt β jest *kątem widzenia ramienia* z metacentrum. Znajomość tej własności ułatwia dokładne narysowanie wykresu biegunowego. Gdy ramię zeruje się, czyli gdy wykres biegunowy przechodzi przez punkt referencyjny, kąt β zeruje się i styczna staje się prostopadła do linii działania siły wyporu. Gdy metacentrum pokryje się z ramieniem ($h = 0$), kąt $\beta = 90^\circ$, co znaczy, że styczna pokrywa się z linią działania siły wyporu, zaś wykres biegunowy jest styczny do ewoluty metacentrycznej.

To, co zostało powiedziane wyżej, dotyczy wykresu biegunowego ramion siły wyporu względem dowolnego punktu referencyjnego. Odpowiednie zależności są takie same, jak dla ramion prostujących, jeśli punkt G przenieść do punktu referencyjnego.

e) Dodatkowe ramię kształtu

Czasami ramiona siły ciężkości i siły wyporu określa się względem metacentrum początkowego M_0 . Metacentrum jest stałym punktem tylko dla walca pływającego poziomo i kuli. W każdym innym wypadku przemieszcza się podczas przechylania okrętu po ewolucie metacentrycznej. Obranie bieguna w punkcie M_0 pozwala zorientować się, jak kształt statku modyfikuje krzywą ramion w stosunku do krzywej ramion walca $l = h_0 \sin \phi$.

Ramię siły wyporu względem M_0 oznacza się przez Δl_k i nazywa się *dodatkowym ramieniem stateczności kształtu*. Z rys. 17 wynika, że:

$$l = h_0 \sin \phi + \Delta l_k. \quad (22)$$

Dodatkowe ramię kształtu Δl_k jest niczym innym, jak ramieniem prostującym l dla $h_0 = 0$. Pomiędzy ramieniem kształtu względem punktu K a dodatkowym ramieniem stateczności kształtu istnieje oczywisty związek: $l_k = z_{M_0} \sin \phi + \Delta l_k$. Wykres biegunowy dodatkowych ramion kształtu Δl_k jest miejscem geometrycznym rzutów metacentrum początkowego M_0 na linie działania siły wyporu. Ma on analogiczne własności, co wykres biegunowy ramion l czy l_k .

Na wykresie biegunowym dodatkowe ramiona kształtu Δl_k można przedstawić wg wzoru (22). Wykresem ramion ciężaru $h_0 \sin \phi$ jest półokrąg o średnicy h_0 , oparty na odcinku GM_0 (rys. 19). Stąd ramię Δl_k jest równe różnicy między wykresem biegunowym l a tym półokręgiem. W punkcie G wykres l i półokrąg winny być styczne ze sobą, natomiast ich punkt przecięcia wyznacza kąt ϕ , przy którym ramię Δl_k zeruje się. Punkt przecięcia leży zatem na linii działania siły wyporu przechodzącej przez M_0 , prostopadłej do wykresu biegunowego Δl_k w punkcie M_0 .

Na wykresie biegunowym wykreśla się również ramię dynamiczne $l_d = HF - a$, odkładając je wzdłuż linii działania siły wyporu od środka wyporu. Nie jest to jednak wykres biegunowy l_d , lecz wykres wzrostu pionowej odległości pomiędzy punktem G i F .

f) Ramiona w układzie kartezjańskim

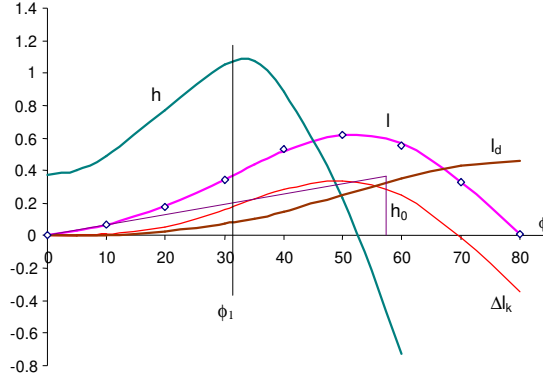
W układzie kartezjańskim typowy przebieg krzywej ramion prostujących w funkcji kąta przechyłu ϕ , zwanej też *krzywą Reeda*, oraz charakterystyk z nią związanych pokazany jest na rys. 21. Kąt, przy którym krzywa Reeda zeruje się, wyznacza *zakres stateczności*. Z kolei kąt wejścia pokładu do wody (lub kąt wyjścia obła z wody, jeśli jest mniejszy), oznaczany przez ϕ_1 , wyznacza *początkowy zakres stateczności*. Przy kącie $\phi = \phi_1$ krzywa Reeda ma punkt przegięcia, a wysokość metacentryczna osiąga wartość maksymalną. Maksimum krzywej ramion występuje przy kącie $\phi_{max} > \phi_1$, tj. po przekroczeniu zakresu początkowej stateczności.

Wysokość metacentryczna $h = l'$ jest pochodną krzywej ramion, a ramię dynamiczne l_d jest krzywą całkową krzywej ramion, tzn. rzędna krzywej l_d przedstawia pole pod krzywą ramion do danego kąta przechyłu. Stąd ta pierwsza zeruje się przy kącie $\phi = \phi_{max}$, gdzie krzywa ramion osiąga maksimum, a ta druga osiąga maksimum przy kącie zerowania się krzywej ramion; punkt przegięcia występuje przy kącie $\phi = \phi_{max}$.

Interpretacją geometryczną pochodnej jest współczynnik kierunkowy stycznej. Stąd nachylenie stycznej do krzywej ramion w początku układu równa się początkowej wysokości metacentrycznej h_0 – styczna w odległości jednego radiana ($57,3^\circ$) ma rzędna równą h_0 . Z rys. 21 widać, że styczna $l = h_0 \phi$, czyli wzór metacentryczny, dość dobrze aproksymuje krzywą ramion do około 12° . Zakres ważności wzoru metacentrycznego zmniejsza się, gdy maleje początkowa wysokość metacentryczna h_0 .

Krzywą ramion można rozwinąć w szereg Maclaurina jedynie w początkowym zakre-

się stateczności, dla $\phi < \phi_1$. Ponieważ jest funkcją nieparzystą, tj. $l(\phi) = -l(-\phi)$, w zerze istnieją tylko pochodne nieparzyste. Korzystając z wcześniejszych wzorów, otrzymamy:



Rys. 21. Krzywa ramion prostujących oraz krzywe z nią powiązane

$$\begin{aligned} l' &= h_0, \\ l''' &= r'' - h_0, \\ l^V &= r^{IV} - r'' + h_0, \\ l^{VII} &= r^{VI} - r^{IV} + r'' - h_0, \dots \end{aligned}$$

Jak widzimy, są to sumy przemienne parzystych pochodnych promieni metacentrycznych w zerze, kończące się początkową wysokością metacentryczną h_0 . Stosując rozwinięcie w szereg Maclaurina, otrzymamy:

$$l = h_0 \phi + \frac{1}{3!} (r'' - h_0) \phi^3 + \frac{1}{5!} (r^{IV} - r'' + h_0) \phi^5 + \frac{1}{7!} (r^{VI} - r^{IV} + r'' - h_0) \phi^7 + \dots \quad (23)$$

Po uporządkowaniu względem h_0 i pochodnych promienia metacentrycznego, rozwinięcie przyjmie postać:

$$l = h_0 \sin \phi - r'' (\sin \phi - \phi) + r^{IV} [\sin \phi - (\phi - \frac{1}{3!} \phi^3)] - r^{VI} [\sin \phi - (\phi - \frac{1}{3!} \phi^3 + \frac{1}{5!} \phi^5)] + \dots \quad (24)$$

Widzimy, że rozwinięcie krzywej ramion sprowadza się do rozwinięcia dodatkowego ramienia kształtu Δl_k . Jest ono ważne jedynie w początkowym zakresie stateczności, co wynika z analityczności promienia metacentrycznego, ograniczonej do tego przedziału. Stosowanie obydwu wzorów jest niewygodne ze względu na uciążliwe znajdowanie w zerze pochodnych promienia metacentrycznego. Dla statku o burtach pionowych pochodne te są następujące:

$$\begin{aligned} r'' &= 3r_0, \\ r^{IV} &= 33r_0, \end{aligned}$$

$$r^{\text{VI}} = 723 r_0$$

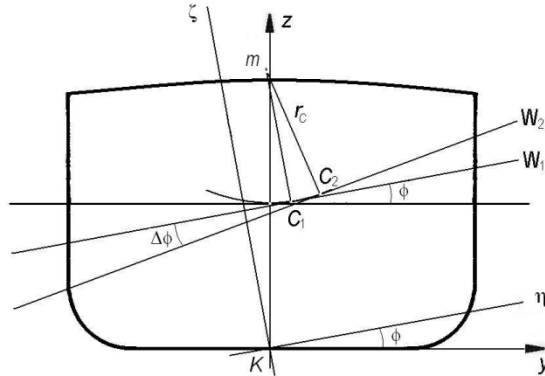
(patrz zadanie 39); ze wzrostem rzędu pochodne r gwałtownie wzrastają.

g) Kryteria stateczności

Krzywa ramion jest podstawą oceny stateczności statku za pomocą *kryteriów stateczności*. Kryteria IMO [5], wywodzące się z badań statystycznych Raholi (1939 r.), normują wprost krzywą ramion, określając minimalne dopuszczalne parametry. Najważniejsze z nich to: początkowa wysokość metacentryczna $h_0 \geq 0,15$ m (dla dużych kontenerowców $h_0 \geq 0,60$ m), położenie maksimum $\phi_{\max} \geq 30^\circ$, $l_{\max} \geq 0,2$ m, ramię dynamiczne $l_d \geq 0,055$ m dla $\phi = 30^\circ$ oraz $l_d \geq 0,09$ m dla $\phi = 40^\circ$.

h) Krzywa środków pływania

Okręt przechyla się bez zmiany wyporności, stąd obraca się wokół osi przechodzącej przez środek ciężkości C (środek pływania) chwilowej wodnicy pływania. Punkt ten zmienia swoje położenie podczas przechylania okrętu, przemieszczając się po krzywej środków pływania. Wodnice równoobjętościowe są styczne do tej krzywej w środku pływania, tocząc się po niej (rys. 22).



Rys. 22. Krzywa środków pływania

Miarą szybkości przemieszczania się środka pływania po tej krzywej jest promień krzywizny, oznaczany przez r_c . By go wyprowadzić, rozpatrzmy promień krzywizny krzywej, po której przemieszcza się środek objętości warstwy, odciętej przez dwie równoległe wodnice o stałej objętości ΔV . Zauważmy, że gdy wodnice obrócą się o kąt $\Delta\phi$, momenty statyczne przemieszczenia klinów górnej i dolnej wodnicy będą przeciwne sobie. Tak więc $\Delta V \Delta s = (J_2 - J_1) \Delta\phi = \Delta J \Delta\phi$, gdzie Δs jest przemieszczeniem środka objętości warstwy, zaś $\Delta J \equiv J_2 - J_1$ jest różnicą momentów bezwładności między górną i dolną wodnicą warstwy. Ponieważ $r_c \equiv \Delta s / \Delta\phi = \Delta J / \Delta V$, stąd w granicy:

$$r_c = dJ/dV. \quad (25)$$

Dla nieskończenie cienkiej warstwy środek objętości pokrywa się bowiem ze środkiem ciężkości wodnicy. Promień krzywizny krzywej środków pływania jest więc równy pochodnej momentu bezwładności wodnicy względem wyporności w kierunku prostopadłym do niej. Z tego względu nazywa się *różniczkowym promieniem metacentrycznym*, a środek krzywizny krzywej środków pływania – *różniczkowym metacentrum*, oznaczanym przez m . Ponieważ $dV = A_{wL} \Delta \zeta$, gdzie $\Delta \zeta$ jest przyrostem zanurzenia w kierunku prostopadłym do wodnicy, stąd wzór (25) można zapisać w postaci:

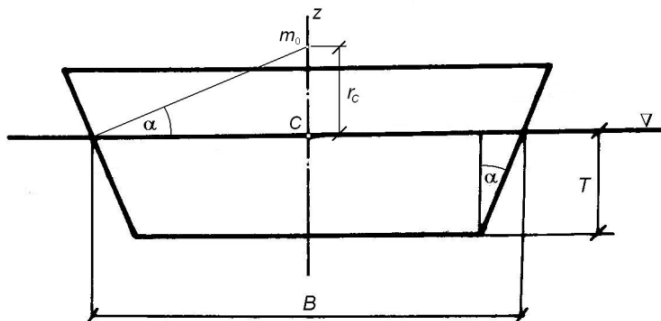
$$r_c = \frac{1}{A_{wL}} \frac{dJ}{d\zeta}.$$

Wzór na różniczkowy promień metacentryczny $r_c = dJ/dV$ łatwo zapamiętać, biorąc za punkt wyjścia wzór na promień metacentryczny $r_F = J/V$. Gdy momenty bezwładności wodnic przyrastają, $r_c > 0$, w przeciwnym wypadku $r_c < 0$. W tym drugim wypadku krzywa środków pływania jest wypukła, a nie wklęsła. Gdy promień krzywizny zmienia znak, na krzywej występuje ostrze, co ma zwykle miejsce przy kącie wejścia pokładu do wody. Uwaga ta dotyczy wszystkich krzywych, w tym także ewoluty metacentrycznej. Ponieważ promień metacentryczny r_F jest zawsze dodatni, krzywa środków wyporu jest krzywą wypukłą.

Analogiczne wzory zachodzą dla przegłębień, z tą różnicą, że za moment bezwładności bierzemy wzdłużny moment bezwładności wodnicy. Znajomość różniczkowych promieni metacentrycznych pozwala na dokładniejsze znalezienie wodnicy przechylonej czy przegłębionej, co wykorzystuje się w wielu sytuacjach. Różniczkowe promienie metacentryczne dla $\phi = 0$ można określić za pomocą krzywych hydrostatycznych. Pochodną dJ/dz określa się z wykresu $J = J(z)$, jako współczynnik kierunkowy stycznej.

Jeśli nastąpi zmiana wyporności bez zmiany przegłębienia statku, to linia działania dodatkowej siły wyporu przechodzi przez środek pływania C (środek ciężkości plasterka). Zatem moment prostujący dla nowej wyporności wynosi: $D_1 l_1 = D l + \Delta D l_c$, gdzie l_c jest ramieniem dodatkowej siły wyporu względem środka ciężkości statku G . Ramie $l_c = l_c(\phi)$, podobnie jak ramie prostujące l , jest funkcją kąta przechyłu.

PRZYKŁAD 5. Znaleźć początkowy różniczkowy promień metacentryczny dla statku cylindrycznego o przekroju trapezowym (rys. 23).



Rys. 23. Ponton o przekroju trapezowym

R o z w i ą z a n i e. Pole wodnicy $A_{wL} = LB$, zaś moment bezwładności $J_x = \frac{1}{12}LB^3$. Zatem korzystając ze wzoru na r_C , mamy:

$$r_C = \frac{1}{A_{wL}} \frac{dJ}{d\zeta} = \frac{1}{LB} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{12} LB^3 \right) = \frac{1}{12} \frac{1}{B} 3B^2 B' = \frac{1}{4} BB' = \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie $B' = 2(\frac{1}{2}B)'$ jest pochodną szerokości pontonu względem zanurzenia. Z rysunku widać, że $(\frac{1}{2}B)' = \operatorname{tg} \alpha$. Zatem: $B' = 2 \operatorname{tg} \alpha$, skąd ostatecznie $r_C = \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem rozchylenia burt. Wzór ważny jest dla dowolnego statku cylindrycznego. Wówczas α ma znaczenie kąta rozchylenia burt na wodnicy, a $\operatorname{tg} \alpha = y'$. Wynik nie zależy od długości statku. Geometryczna konstrukcja tego promienia pokazana jest na rysunku. Widzimy, że początkowe metacentrum różniczkowe leży w PS nad wodnicą na wysokości normalnej do burty, wystawionej w punkcie przecięcia się z wodnicą. Gdy burty pochylone są do środka, $\alpha < 0$, co daje $r_C < 0$; różniczkowe metacentrum leży wówczas pod wodnicą. ■

PRZYKŁAD 6. Znaleźć wyrażenie na krzywą ramion w początkowym zakresie stateczności dla statku o burtach pionowych.

R o z w i ą z a n i e. Statek o burtach pionowych ma wodnice niezależne od zanurzenia, stąd różniczkowy promień metacentryczny $r_C = 0$. Oznacza to, że wodnica przechylona i wodnica początkowa przecinają się wzdłuż osi symetrii wodnicy początkowej. Wobec tego rzędna wodnicy przechylonej $\eta = y/\cos \phi$. Moment bezwładności wodnicy $J_\xi = \frac{2}{3} \int_L \eta^3 dx$, stąd promień metacentryczny $r = r_0/\cos^3 \phi$. Zależność ta obowiązuje dla przechyłów w obrębie burt, czyli w początkowym zakresie stateczności, dla $\phi < \phi_1$. Korzystając ze wzorów (18), otrzymamy:

$$y = \int_0^\phi r \cos \phi \, d\phi = \int_0^\phi \frac{r_0}{\cos^2 \phi} \, d\phi = r_0 \operatorname{tg} \phi,$$

$$z = z_F + \int_0^\phi r \sin \phi \, d\phi = z_F + r_0 \int_0^\phi \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos^2 \phi} \, d\phi = z_F + \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \phi.$$

Ostatnią całkę obliczyliśmy przez podstawienie, wprowadzając nową zmienną za $\operatorname{tg} \phi$. Stosując teraz wzór (19), po wykonaniu działań, otrzymamy:

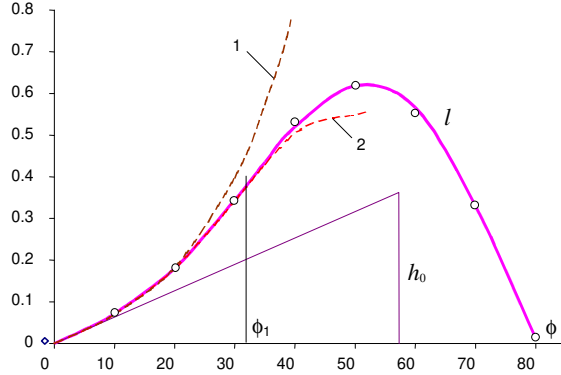
$$l = (h_0 + \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \phi) \sin \phi. \quad (26)$$

Rys. 24 przedstawia porównanie krzywej 1 wg wzoru (26) z rzeczywistą krzywą ramion z rys. 21. Obie krzywe pokrywają się na około $\frac{2}{3}$ początkowego zakresu stateczności. ■

Jeśli wziąć trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia (23), to taka aproksymacja (krzywa 2) pokrywa się z krzywą ramion w całym początkowym zakresie stateczności; różnice są niedostrzegalne. Identyfikacja współczynników rozwinięcia podana jest w zadaniu 21.

Wzór (26) posiada duże znaczenie praktyczne: opisuje krzywą ramion w początkowym zakresie przechyłów. Jego stosowanie jest proste, gdyż występują w nim tylko dwa parametry: początkowa wysokość metacentryczna h_0 i początkowy promień metacentryczny r_0 , łatwe do określenia.

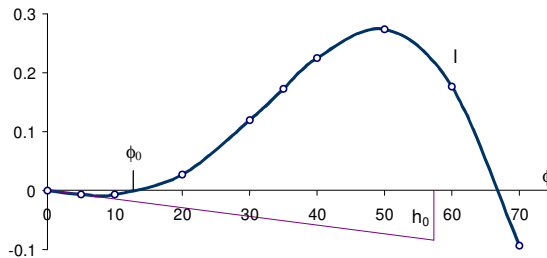
Wzór (26) umożliwia wyznaczenie kąta przechyłu statku wywołanego ujemną wysokością metacentryczną; wyznacza go równanie $l = 0$. Niezerowy pierwiastek jest miejscem zerowym pierwszego czynnika, danym wzorem (27):



Rys. 24. Porównanie krzywych ramion

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \sqrt{-\frac{2h_0}{r_0}}. \quad (27)$$

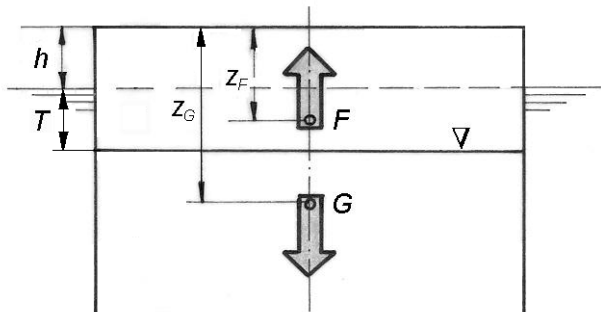
Krzywa ramion z ujemną wysokością metacentryczną pokazana jest na rys. 25 ($h_0 = -0,085$ m, $r_0 = 2,6$ m, stąd $\phi_0 = 14,7^\circ$). W takim wypadku położenie wyprostowane nie jest stabilne; statek przechylił się do drugiego miejsca zerowego, określonego wzorem (27). Znikoma ujemna wysokość metacentryczna daje spory przechył, co jest niekorzystne dla bezpieczeństwa statku. Z tego względu jedno z kryteriów stateczności wymaga, by wysokość metacentryczna była dodatnia podczas eksploatacji statku i nie spadała poniżej pewnej minimalnej wartości. Jak widać z rysunku, w położeniu równowagi wysokość metacentryczna h jest dodatnia (styczna do krzywej ma dodatnie nachylenie). Można pokazać (patrz zadanie 22), że wówczas $h \approx -2h_0$.



Rys. 25. Krzywa ramion z ujemną wysokością metacentryczną

i) Warstwa wypornościowa

Ciekawym przypadkiem stateczności jest pływanie ciała, jak szklanka, odwróconego do góry dnem (rys. 26). Pływalność w takim wypadku zapewnia poduszka powietrza, wewnątrz której panuje ciśnienie, jak na głębokości T , tj. $p = p_a + \gamma T$. Głębokość T jest taka sama, jak przy pływaniu ciała w pozycji odwróconej, normalnej. Ciężar naczynia jest równoważony ciężarem wypartej cieczy o grubości T . Linia działania siły wyporu przechodzi przez środek wyporu F , czyli środek objętości wypartej cieczy. Objętość wyparta jest warstwą o jednakowych wodnicach (pomijamy grubość ścianek naczynia), zatem środek wyporu przy przechyłach nie przemieszcza się, tym samym promień metacentryczny $r = 0$. Warunek pływania stabilnego jest więc taki sam, jak dla okrętu podwodnego w zanurzeniu – środek wyporu musi być nad środkiem ciężkości: $z_G > z_F$ (licząc od dna). By tak było, grubość poduszki $h + T$, a tym samym ilość zamkniętego powietrza nie może być zbyt duża.



Rys. 26

Stabilność można poprawić, zmniejszając objętość powietrza (grubość poduszki), zważając jednak, by ciało nie utonęło, czyli wystawało nad ciecz, co zachodzi, gdy $h > 0$.

§ 9. Krzywa ramion pontonu prostopadłościennego

Z powodu skomplikowanego kształtu krzywą ramion prostujących statku wyznacza się numerycznie. W nielicznych przypadkach prostych brył geometrycznych, jak ponton prostopadłościenny, można znaleźć ją analitycznie. Dla pontonu krzywa ramion opisana jest trzema przedziałami, wyznaczonymi przez kąty ϕ_1 i ϕ_2 , przy których zanurza się krawędź pokładu lub wychodzi obłó z wody. Kąt ϕ_1 wyznacza zakres początkowej stateczności: jest to mniejszy ze wspomnianych kątów, zaś ϕ_2 jest większym z nich. Gdy $\phi > \phi_1$, mówimy o dużych kątach przechyłu.

Jeśli wprowadzić oznaczenie $f = \min(F, T)$, gdzie T jest zanurzeniem pontonu, zaś $F = H - T$ jest wolną burtą, to zakres początkowej stateczności określa wzór:

$$\operatorname{tg} \phi_1 = 2f/B,$$

gdzie B jest szerokością pontonu. Kąt ϕ_2 łatwo znajdziemy, jeśli określimy położenie wodnicy równoobjętościowej przy przechyle 90° . Oznaczając odległość wodnicy od

burty przez x , mamy $fB = xH$, gdzie H jest wysokością pontonu. Wodnice przy przechyle ϕ_2 i 90° przecinają się w połowie szerokości wodnic (należy zrobić szkic). Stąd:

$$\operatorname{tg} \phi_2 = \frac{1}{2}H/x = H^2/2Bf = (H/B)^2 \operatorname{ctg} \phi_1.$$

Krzywą ramion najprościej znaleźć, gdy znamy przebieg promieni metacentrycznych dla przechyłów równoobjętościowych. W tym celu trzeba określić szerokość wodnic równoobjętościowych. Gdy $\phi \leq \phi_1$, $B_\phi = B/\cos \phi$, a gdy $\phi \geq \phi_2$, $B_\phi = H/\sin \phi$. Dla $\phi \in \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$, tj. gdy wodnica przecina jedną burtę, szerokość wodnicy wynika z warunku, że pole przekroju pontonu znajdującego się pod, jak i nad powierzchnią wody jest stałe. Zatem: $fB = \frac{1}{2}B_\phi^2 \sin \phi \cos \phi$, co daje:

$$B_\phi = (2fB/\sin \phi \cos \phi)^{1/2}.$$

Promienie metacentryczne znajdziemy ze wzoru: $r = J/V = B_\phi^3/12BT$. Stąd:

$$r = \begin{cases} \frac{r_0}{\cos^3 \phi} & \text{gdy } \phi \leq \phi_1 \\ \frac{r_0}{\cos^3 \phi} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{tg} \phi} \right)^{1.5} & \text{gdy } \phi_1 < \phi < \phi_2 \\ \frac{r_0}{\sin^3 \phi} \left(\frac{H}{B} \right)^3 & \text{gdy } \phi \geq \phi_2 \end{cases}$$

Widzimy, że promień metacentryczny r dla dowolnego kąta przechyłu jest iloczynem początkowego promienia metacentrycznego r_0 i pewnej funkcji kąta ϕ . Uwzględniając wyniki zadania 22 a), ramię prostujące i ramię dynamiczne da się przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} l &= r_0 m(\phi) - a \sin \phi, \\ l_d &= r_0 d(\phi) - a(1 - \cos \phi), \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie $m(\phi)$ i $d(\phi)$ to pewne funkcje kąta przechyłu, przy czym $d(\phi)$ jest krzywą całkową $m(\phi)$. Wyraz $r_0 m(\phi)$ jest ramieniem kształtu względem początkowego położenia środka wyporu F . Uwzględniając, że $l_d = HF - a$, wyraz $r_0 d(\phi) \equiv HF - a \cos \phi$.

Ramię prostujące i dynamiczne wyznaczmy z pomocą wzorów (19) i (21), w oparciu o współrzędne środka wyporu (18). Otrzymamy stąd wzory:

$$\begin{aligned} r_0 m(\phi) &= y \cos \phi + z \sin \phi - z_F \sin \phi, \\ r_0 d(\phi) &= y \sin \phi - z \cos \phi + z_F \cos \phi. \end{aligned}$$

Współrzędne środka wyporu w przedziale $\phi \leq \phi_1$ wyznaczaliśmy już w przykładzie na s. 36 dla statku o burtach pionowych: $y = r_0 \operatorname{tg} \phi$, $z = z_F + \frac{1}{2}r_0 \operatorname{tg}^2 \phi$. Stąd:

$$\begin{aligned} m(\phi) &= (1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \phi) \sin \phi, \\ d(\phi) &= \frac{1}{2} \sin \phi \operatorname{tg} \phi. \end{aligned}$$

W przedziale $\phi \in \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ obliczenie współrzędnych środka wyporu jest następujące:

$$y = y_1 + \int_{\phi_1}^{\phi} r \cos \theta d\theta = y_1 + r_0 \operatorname{tg}^{1.5} \phi_1 \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{\operatorname{tg}^{1/2} \theta}{\sin^2 \theta} d\theta,$$

$$z = z_1 + \int_{\phi_1}^{\phi} r \sin \theta d\theta = z_1 + r_0 \operatorname{tg}^{1.5} \phi_1 \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\theta}{\operatorname{tg}^{1/2} \theta \cos^2 \theta},$$

gdzie y_1 i z_1 to współrzędne środka wyporu na krańcu pierwszego przedziału, w punkcie $\phi = \phi_1$. Otrzymane całki łatwo obliczyć metodą podstawiania. Stosując w pierwszej całce podstawienie $x = \operatorname{ctg} \theta$, a w drugiej $x = \operatorname{tg} \theta$, otrzymamy:

$$y = y_1 + 2r_0 \operatorname{tg}^{1.5} \phi_1 \sqrt{\operatorname{ctg} \theta} \Big|_{\phi_1}^{\phi} = 3r_0 \operatorname{tg} \phi_1 - 2r_0 \operatorname{tg}^{1.5} \phi_1 \sqrt{\operatorname{ctg} \phi},$$

$$z = z_1 + 2r_0 \operatorname{tg}^{1.5} \phi_1 \sqrt{\operatorname{tg} \theta} \Big|_{\phi_1}^{\phi} = z_F - \frac{3}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \phi_1 + 2r_0 \operatorname{tg}^{1.5} \phi_1 \sqrt{\operatorname{tg} \phi}.$$

Stąd po wykonaniu algebraicznych działań, otrzymamy wzory:

$$m(\phi) = 6t(\cos \phi - t \sin \phi) - 8t^{3/2} \cos 2\phi / (\sin 2\phi)^{1/2},$$

$$d(\phi) = 6t(\sin \phi + t \cos \phi) - 8t^{3/2} (\sin 2\phi)^{1/2},$$

gdzie $t = f/B$. We wzorach powyższych wykorzystaliśmy tożsamości:

$$\cos \phi \sqrt{\operatorname{ctg} \phi} - \sin \phi \sqrt{\operatorname{tg} \phi} = \sqrt{2} \cos 2\phi / (\sin 2\phi)^{1/2},$$

$$\sin \phi \sqrt{\operatorname{ctg} \phi} + \cos \phi \sqrt{\operatorname{tg} \phi} = \sqrt{2} \sin 2\phi.$$

W przedziale $\phi \geq \phi_2$, obliczenie współrzędnych środka wyporu jest następujące:

$$y = y_2 + \int_{\phi_2}^{\phi} r \cos \theta d\theta = y_2 + r_0 \left(\frac{H}{B}\right)^3 \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta,$$

$$z = z_2 + \int_{\phi_2}^{\phi} r \sin \theta d\theta = z_2 + r_0 \left(\frac{H}{B}\right)^3 \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}.$$

Stosując w obu całkach podstawienie $x = \operatorname{ctg} \theta$, otrzymamy:

$$y = y_2 + \frac{1}{2} r_0 \left(\frac{H}{B}\right)^3 (\operatorname{ctg}^2 \phi_2 - \operatorname{ctg}^2 \phi) = 6r_0 t - 6r_0 \frac{B}{H} t^2 - \frac{1}{2} r_0 \left(\frac{H}{B}\right)^3 \operatorname{ctg}^2 \phi,$$

$$z = z_2 + r_0 \left(\frac{H}{B}\right)^3 (\operatorname{ctg} \phi_2 - \operatorname{ctg} \phi) = z_F + 6r_0 \frac{H}{B} t - 6r_0 t^2 - r_0 \left(\frac{H}{B}\right)^3 \operatorname{ctg} \phi.$$

Po wykonaniu algebraicznych działań, otrzymamy:

$$m(\phi) = 6t(1 - \frac{B}{H} t)(\cos \phi + \frac{H}{B} \sin \phi) - \left(\frac{H}{B}\right)^3 (1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \phi) \cos \phi,$$

$$d(\phi) = 6t(1 - \frac{B}{H} t)(\sin \phi - \frac{H}{B} \cos \phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{B}\right)^3 \operatorname{ctg} \phi \cos \phi.$$

Łatwo sprawdzić, że w każdym przedziale pochodna funkcji $d(\phi)$ równa się $m(\phi)$.

Powyższe wzory mogą służyć do obliczania krzywej ramion nie tylko pontonów, lecz także jednostek pływających o dużej pełnotliwości, jak barki. Są wykorzystywane także do uwzględniania wpływu ciężarów płynnych na krzywą ramion statku, w przypadku zbiorników częściowo zapełnionych, jak np. zbiorniki rozchodowe.

§ 10. Wyznaczanie krzywej ramion

Krzywa ramion prostujących ma bezpośredni związek z bezpieczeństwem statecznościowym statku. Stąd musi być znana w każdym momencie eksploatacji statku. Do tego celu załoga używa gotowej informacji, przygotowanej przez biuro projektowe.

a) Metoda pantokaren

Krzywą ramion w eksploatacji wyznacza się ze wzoru $l = l_k - l_c$, jako różnice między ramieniem kształtu i ramieniem ciężaru. Obydwa ramiona zależą od punktu referencyjnego, znajdującego się w PS, który jest znany. Jeśli rzędną punktu referencyjnego (bieguna) oznaczyć przez z_R , to ramię ciężaru określa wzór: $l_c = (z_G - z_R) \sin \phi$. Problemem są ramiona kształtu $l_k = l_k(V, \phi)$, które są funkcją dwóch zmiennych niezależnych: wyporności (zanurzenia) i kąta przechyłu ϕ . Funkcję tę przedstawia się na wykresie zwanym *wykresem pantokaren*, gdzie zmienną niezależną jest wyporność, a parametrem kąt przechyłu, zmieniający się zazwyczaj co 10° .

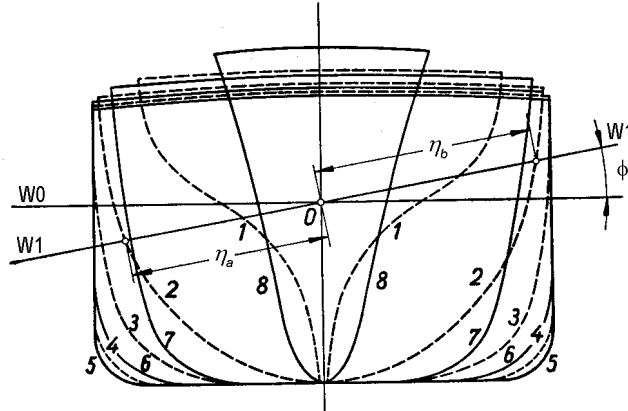
Jak przygotowuje się dane do wykresu pantokaren? Zazwyczaj prowadzi się szereg równoległych wodnic o zadanym kącie nachylenia $\phi = \text{const}$ i oblicza się wyporność oraz ramię siły wyporu l_k względem zadanego punktu referencyjnego. Do wyznaczenia ramienia kształtu l_k potrzebna jest znajomość współrzędnych środka wyporu y i z , a te znajduje się obliczając momenty statyczne wyporności względem PS i PP. Obliczenia te nie wymagają komentarza, gdyż znajdowanie środka objętości jest jednym z elementarnych zagadnień mechaniki technicznej.

b) Metoda Kryłowa-Dargniesa

Zajmiemy się drugą możliwością obliczania ramion kształtu dla zadanej wyporności $V = \text{const}$ w funkcji kąta przechyłu ϕ , korzystając z własności wodnic równoobjętościowych, znanej jako *metoda Kryłowa-Dargniesa*. Jest to najdokładniejsza metoda obliczania krzywej ramion. Oparta jest na wodnicach równoobjętościowych, prowadzonych z krokiem $\Delta\phi = 5 \div 10^\circ$, dla których znajdujemy promienie metacentryczne $r(\phi)$, co pozwala na skonstruowanie wykresu biegunowego (rys. 19). Wodnice powinny przechodzić przez punkty o dużych krzywiznach lub załamaniach na wręgach, jak obłó, krawędź pokładu, krawędź nadbudówki itp. Krok prowadzenia wodnic powinien być w miarę równy. Do przeprowadzenia obliczeń potrzebne jest obustronne owrężenie statku (rys. 27).

Obliczenia wykonuje się krokami. Rozpoczynamy się od wodnicy poziomej, odpowiadającej zadanej wyporności. Potrzebne parametry, jak zanurzenie z , A_{WL} , z_F , J_x oraz r_0 można wziąć z krzywych hydrostatycznych. Aby obliczyć parametry nowej wodnicy równoobjętościowej, nachylonej pod kątem $\phi + \Delta\phi$, musimy znać parametry poprzedniej wodnicy, nachylonej pod kątem ϕ , takie jak położenie środka pływania C (środku cięż-

kości wodnicy), pole wodnicy A i poprzeczny moment bezwładności wodnicy J_x . Nową wodnicę pomocniczą $W1$ rysujemy przez środek ciężkości C_0 poprzedniej wodnicy i mierzymy rzędne η_a i η_b na poszczególnych wręgach. Parametry wodnicy $W1$ są następujące:



Rys. 27. Obustronne owrężenia statku

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_L (\eta_b + \eta_a) dx, \\ S_0 &= \frac{1}{2} \int_L (\eta_b^2 - \eta_a^2) dx, \\ J_0 &= \frac{1}{3} \int_L (\eta_b^3 + \eta_a^3) dx, \\ J_1 &= J_0 - A_1 \eta_c^2, \\ \eta_c &= S_0 / A_1, \end{aligned}$$

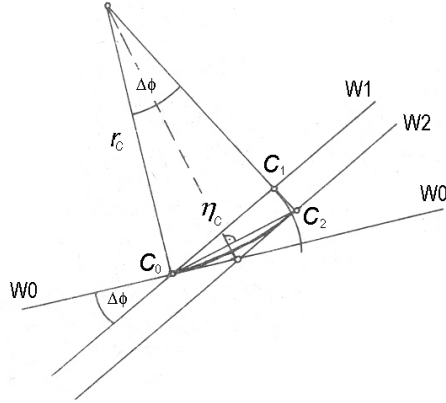
gdzie S_0 oraz J_0 to moment statyczny i moment bezwładności wodnicy pomocniczej względem poprzedniego środka pływania C_0 . Środek ciężkości wodnicy pomocniczej C_1 leży w odległości η_c od punktu C_0 , a jej centralny (własny) moment bezwładności wynosi J_1 , obliczony z pomocą twierdzenia Steinera.

Wodnica pomocnicza $W1$ nie jest wodnicą równoobjętościową. Znajdowanie wodnicy równoobjętościowej $W2$, równoległej do wodnicy pomocniczej, pokazane jest na rys. 28. Idea polega na tym, by znaleźć ją w oparciu o dane wodnicy pomocniczej.

Konstrukcja oparta jest na założeniu, że na niewielkim odcinku krzywą środków pływania można aproksymować łukiem okręgu o promieniu r_c , na razie nieznanym. Dodatkowo czyni się założenie, że środek ciężkości wodnicy $W2$ leży na prostej prostopadłej do wodnicy $W1$ w punkcie C_1 . Wynika stąd, że wodnica równoobjętościowa przechodzi przez środek łuku o promieniu η_c , zakreślonego z punktu C_0 . Wprost z rysunku wynika, że przesunięcie $\Delta\zeta$ wodnicy wynosi:

$$\Delta\zeta = C_1 C_2 = -\frac{1}{2} \eta_c \Delta\phi. \quad (29)$$

W rzeczywistości odcinek $C_1 C_2$ jest odchylony od pionu (normalnej w punkcie C_1). Nachylenie względem pionu dane jest prostym wzorem, który wyprowadzimy później:



Rys. 28. Mechanizm toczenia się wodnic równoobjętościowych

$$\eta'_c = \frac{1}{A_s} \frac{\Delta A}{\Delta \phi},$$

gdzie $A_s = \frac{1}{2}(A_0 + A_1)$ jest średnim polem wodnicy, zaś $\Delta A = A_1 - A_0$ jest przyrostem pola wodnicy W1 w stosunku do W0. Nachylenie jest dodatnie (odcinek C_1C_2 odchylony jest od pionu zgodnie z ruchem wskazówek zegara), gdy pole wodnicy pomocniczej przyrasta (poprawność wzoru łatwo sprawdzić na przykładzie pontonu prostopadłościennego). Przesunięcie wodnicy W2 wyraża się tym samym wzorem (29), co poprzednio, jeśli w miejsce η_c wprowadzić skorygowaną wartość $\eta_c + \Delta\eta_c$, uwzględniając odchylenie odcinka C_1C_2 od pionu. Ponieważ $\Delta\eta_c = \eta'_c \Delta\zeta$, stąd:

$$\Delta\zeta = -\frac{1}{2}(\eta_c + \eta'_c \Delta\zeta) \Delta\phi,$$

co po rozwiązaniu daje: $\Delta\zeta = \Delta\zeta_0 / (1 + \epsilon)$, gdzie $\epsilon = \frac{1}{2}\eta'_c \Delta\phi$ jest poprawką, zaś $\Delta\zeta_0$ jest przesunięciem wodnicy W2 w stosunku do W1 bez uwzględniania poprawki, czyli gdy odcinek C_1C_2 jest pionowy, jak na rys. 28. Wodnica równoobjętościowa przechodzi oczywiście przez środek łuku o promieniu $\eta_c + \Delta\eta_c$, zakreślonego z punktu C_0 .

W oryginalnej metodzie przyjmuje się, że charakterystyki wodnicy równoobjętościowej i pomocniczej są takie same, co nie jest prawdą. W szczególności, można łatwo oszacować zmianę momentu bezwładności wodnicy W2, wywołaną jej przesunięciem:

$$\Delta J = J_2 - J_1 = (\Delta J / \Delta\zeta) \Delta\zeta = A_1 r_c \Delta\zeta,$$

gdzie J_1 oraz J_2 są momentami centralnymi wodnicy W1 i W2. Wykorzystaliśmy tu wzór (25) na różniczkowy promień metacentryczny. Ponieważ $r_c = (\eta_c + \Delta\eta_c) / \Delta\phi$, co wynika z rys. 28, stąd: $r_c = (\eta_c / \Delta\phi) [1 + \epsilon / (1 + \epsilon)]$. Zatem:

$$\begin{aligned} \Delta J &= A_1 (\eta_c / \Delta\phi) [1 + \epsilon / (1 + \epsilon)] (-\frac{1}{2} \eta_c \Delta\phi) / (1 + \epsilon) \\ &= -\frac{1}{2} A_1 \eta_c^2 (1 + 2\epsilon) / (1 + \epsilon)^2. \end{aligned}$$

Tak więc:

$$J_2 = J_1 + \Delta J = J_1 - \frac{1}{2} A_1 \eta_c^2 (1 + 2\varepsilon) / (1 + \varepsilon)^2.$$

Jak widać, moment bezwładności wodnicy równoobjętościowej jest zawsze mniejszy od momentu bezwładności wodnicy pomocniczej, bez względu na kierunek przesunięcia wodnicy W2, gdyż η_c jest w kwadracie. Nieuwzględnianie poprawek dla wodnicy równoobjętościowej prowadzi do zawyżania promieni metacentrycznych, a tym samym do zawyżania krzywej ramion prostujących. Jeśli poprawka $\varepsilon \approx 0$, to ostatni iloraz redukuje się do 1. Wówczas, $J_2 = J_1 - \frac{1}{2} A_1 \eta_c^2$, co jest tożsame z $J_2 = J_0 - \frac{3}{2} A_1 \eta_c^2$. Promień metacentryczny $r_2 = J_2/V$. Przechodząc do następnego kroku kąta, wodnica W2 staje się wodnicą W0. Z braku możliwości oszacowania pola wodnicy równoobjętościowej, przyjmujemy że $A_2 = A_1$. Do tego celu potrzebna byłaby znajomość pochodnej A' , która wyraża się za pomocą charakterystyk wodnicy W1, źle uwarunkowanych numerycznie. Z tego względu musimy zrezygnować z szacowania pola W2.

Znając promienie metacentryczne, możemy znaleźć współrzędne środka wyporu y i z albo analitycznie wg wzoru (18), a następnie ramię prostujące l wg wzoru (19), albo wykreślnie, z pomocą wykresu biegunowego (rys. 19). Konstrukcję wykresu zaczynamy od krzywej środków wyporu. Zakłada się, że krzywą tę na niewielkim odcinku można zastąpić łukiem okręgu o promieniu równym średniej arytmetycznej promieni metacentrycznych na końcach odcinka odpowiadającego danemu krokowi kąta $\Delta\phi$. Środki tych łuków, punkty O na rys. 19, mają jedynie znaczenie pomocnicze. Znając krzywą środków wyporu oraz linie działania siły wyporu, możemy narysować pozostałe krzywe na wykresie biegunowym.

§ 11. Momenty przechylające wywołane przemieszczaniem ciężaru lub zmianą wyporności okrętu

Przesuwanie ciężaru wiąże się z przyłożeniem momentu do statku, co skutkuje zmianą orientacji statku względem wody, tj. zmianą przechyłu czy przegłębienia. Nowe położenie równowagi najlepiej znajduje się za pomocą twierdzenia o przesuwaniu siły, znanego z mechaniki. Twierdzenie to mówi, że przesunięcie ciężaru możemy zastąpić przyłożeniem pary sił, utworzonej z siły ciężkości w nowym położeniu i siły jej przeciwnej w poprzednim położeniu. Moment wspomnianej pary jest momentem przechylającym i/lub przegłębającym statek. Położenie równowagi wystąpi w punkcie, w którym moment przechylający zrówna się on z momentem prostującym. Przy takim ujęciu, przemieszczanie ciężaru nie zmienia środka ciężkości statku, gdyż ciężar znajduje się jakby w poprzednim położeniu, tym samym nie zmienia krzywej ramion.

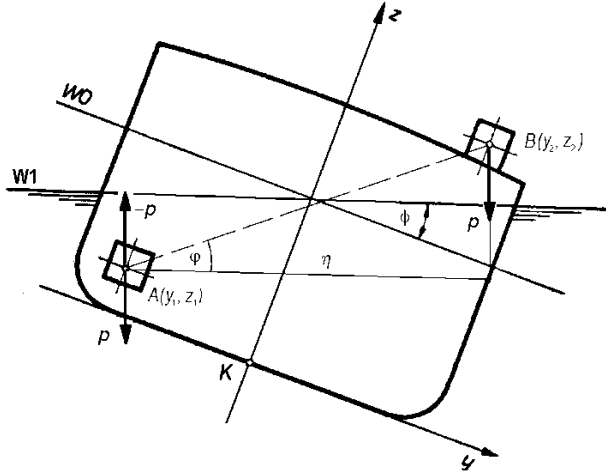
Założmy, że na okręcie przesunięto ciężar p z punktu A do B (rys. 29). Moment przechylający $M_p = p\eta$, gdzie η jest ramieniem pary sił, tożsamym z poziomym przemieszczeniem ciężaru, czyli rzutem wektora przemieszczenia $\mathbf{r} = \mathbf{AB}$ na płaszczyznę wody. Wartość momentu nie zależy od tego, w jakim położeniu był statek przed przesunięciem ciężaru, wyprostowanym czy przechylonym; może sumować się z wcześniej działającymi momentami przechylającymi, jeśli takie występują. Z rysunku widać wprost,

że największy moment występuje, gdy przemieszczenie jest poziome, tj. równoległe do lustra wody. Kąt równowagi znajdziemy z równania $p\eta = Dl$.

W układzie osi kadłuba, wektor przemieszczenia $\mathbf{r} = \mathbf{AB} = (x, y, z)$, gdzie składowe wektora przemieszczenia równają się różnicy współrzędnych punktu B i A . Zatem:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1$$

(układ pokazany na rys. 29 jest układem lewoskrętnym). Gdy $y > 0$, statek przechyla się na prawą burtę.



Rys. 29. Powstawanie momentu przechylającego podczas przesuwania ciężaru

Gdy przesunięcie odbywa się w płaszczyźnie wręgowej, a statek nie ma przegłębienia, tj. pływa na równej stępce, wówczas:

$$\eta = r \cos \phi = y \cos \phi + z \sin \phi,$$

co wynika wprost z rysunku, gdzie $\phi = \alpha - \phi$, przy czym $\alpha = \arctg z/y$ jest kątem nachylenia wektora przemieszczenia r względem osi y . Uwzględniając powyższe, równanie na kąt równowagi $p\eta = Dl$ przyjmie postać:

$$\begin{aligned} p(y \cos \phi + z \sin \phi) &= Dl, \\ p y \cos \phi &= D(h_0 \sin \phi + \Delta l_k) - p z \sin \phi = D(h_1 \sin \phi + \Delta l_k), \\ p y \cos \phi &= D l_1, \end{aligned}$$

gdzie $h_1 = h_0 - pz/D$ jest nową wysokością metacentryczną, zaś l_1 jest nową krzywą ramion dla skorygowanego położenia rzędnej środka ciężkości.

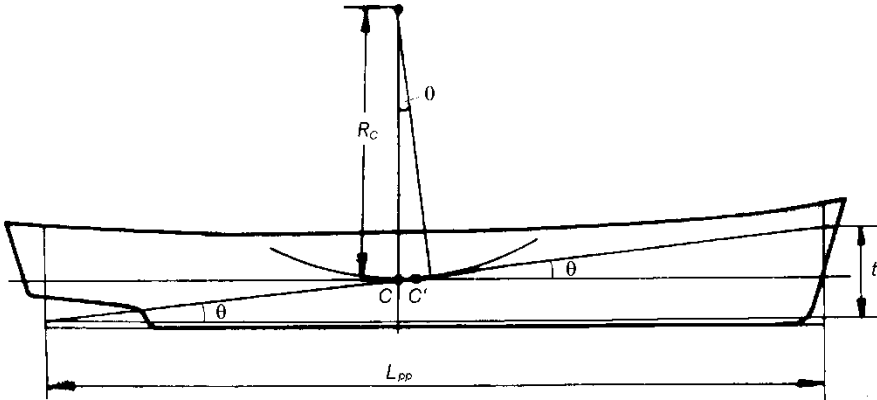
Przesunięcie wzdłużne omówiliśmy wcześniej. Znając przegłębienie dane wzorem (17), zmiany zanurzeń na rufie i dziobie określone są wzorami:

$$\Delta T_r = -(\frac{1}{2}L_{pp} + x_{C'})\theta,$$

$$\Delta T_d = -(\frac{1}{2}L_{pp} - x_C)\theta,$$

gdzie $x_{C'} = x_C + \frac{1}{2}R_C\theta$ jest odciętą punktu przecięcia się wodnicy przegłębionej z wodnicą początkową (rys. 30), R_C jest dużym różniczkowym promieniem metacentrycznym, zaś $\theta = (t - t_k)/L_{pp}$ jest kątem przegłębienia. Wzory wynikają bezpośrednio z rysunku.

W przypadku dowolnego przesunięcia, w zakresie małych kątów stosujemy zasadę superpozycji, tj. obliczamy przechył i przegłębienie niezależnie od siebie.



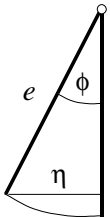
Rys. 30. Mechanizm przegłębienia się statku

a) Ładunki płynne

Przemieszczanie ciężaru zachodzi także w przypadku ciężarów ruchomych, jak ciężary podwieszone, ładunki sypkie czy ciecze w niecałkowicie zapełnionych zbiornikach, jak mówimy – ze swobodną powierzchnią. Wpływ ciężarów ruchomych na stateczność statku niczym nie różni się od przesunięcia ładunku. Różnicą jest tylko taka, że te pierwsze przemieszczają się samoczynnie, pod wpływem siły ciężkości, a to drugie jest narzucone, intencjonalne. W pierwszym wypadku ramię przemieszczenia ciężaru $\eta = \eta(\phi)$ jest funkcją jedynie kąta przechyłu. W drugim wypadku $\eta = \eta(\alpha - \phi)$ jest funkcją różnicy kątów, gdzie α (kąt przemieszczenia względem osi y) jest stały.

Jeśli ciężar wisi swobodnie na linie o długości e (rys. 31), to poziome przemieszczenie ciężaru η w wyniku przechyłu okrętu wynosi:

$$\eta = e \sin \phi.$$



Stąd moment prostujący okrętu DI będzie pomniejszony o $p\eta$. Zatem faktyczny moment prostujący wyniesie:

$$\begin{aligned} DI - p e \sin \phi &= D(h_0 \sin \phi + \Delta l_k) - p e \sin \phi \\ &= D(h_1 \sin \phi + \Delta l_k) = DI_1, \end{aligned}$$

Rys. 31

gdzie $h_1 = h_0 - pe/D$ jest nową wysokością metacentryczną, zaś l_1 jest nową krzywą ramion dla skorygowanego położenia rzędnej środka ciężkości. Tak więc krzywa ramion prostujących statku z podwieszonym ciężarem jest taka, jakby ciężar znajdował się w punkcie zaczepienia liny.

W wypadku cieczy ze swobodną powierzchnią poziome przemieszczenie ciężaru cieczy w zbiorniku jest ramieniem siły ciężkości przemieszczonej cieczy względem środka ciężkości cieczy w położeniu wyprostowanym. Jest to więc odpowiednik ramienia kształtu l_k dla siły wyporu względem środka wyporu w położeniu wyprostowanym. Skorygowany moment prostujący Dl_1 równa się zatem $Dl - p\eta$, gdzie p jest ciężarem cieczy w zbiorniku. Widzimy, że do korekty krzywej ramion ze względu na swobodne powierzchnie musielibyśmy znać pantokareny zbiornika $\eta = \eta(v, \phi)$, zależne od kąta przechyłu i objętości cieczy w zbiorniku, tj. stopnia wypełnienia zbiornika. Jest oczywiste, że tej korekty nie ma, gdy $p = 0$, czyli gdy zbiornik jest pusty, i gdy $\eta = 0$, czyli gdy zbiornik jest pełny. Intuicyjnie wyczuwa się, co wspiera także twierdzenie Rolle'a, że największa korekta, czyli największy wpływ swobodnych powierzchni na stateczność występuje, gdy wypełnienie zbiornika jest zbliżone do połowy.

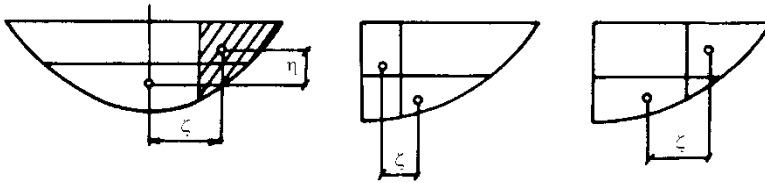
W przypadku małych kątów przechyłu, środek ciężkości cieczy przemieszcza się po łuku okręgu, którego promień $r_G = i_x/v$, gdzie i_x jest poprzecznym momentem bezwładności swobodnej powierzchni cieczy względem osi przechodzącej przez środek ciężkości powierzchni. Dla małych kątów ciecz zachowuje się więc tak, jakby była zawieszona na linie o długości $e = r_G$, promieniowi metacentrycznemu środka objętości cieczy w zbiorniku. Powoduje to zmniejszenie wysokości metacentrycznej o wielkość $pe/D = \gamma_c i_x/D$, która nie zależy jawnie od ilości cieczy w zbiorniku, gdzie γ_c jest ciężarem właściwym cieczy.

Aby poprawka na swobodną powierzchnię była ograniczona, trzeba ograniczać moment bezwładności swobodnych powierzchni, dzieląc zbiorniki grodziami lub dennikami wzdłużnymi, jak to jest na zbiornikowcach czy w zbiornikach dennych.

W odróżnieniu od poprawki na wysokość metacentryczną, korekta krzywej ramion jest bardzo pracochłonna, bowiem wymaga znajomości pantokaren zbiornika. Aby więc uprościć obliczenia, wykonuje się je dla najgorszego wypełnienia zbiornika. Udowodnimy, że występuje ono przy 50% wypełnienia zbiornika. Większość zbiorników na okręcie jest zbliżona do prostopadłościennych. Pantokareny dla takich zbiorników znajduje się w oparciu o wzory dla pontonów prostopadłościennych.

Za miarę wpływu swobodnej powierzchni na stateczność przyjmijmy zmniejszenie pracy momentu prostującego od zera do 90° przechyłu. Pracę wykonuje moment prostujący Dl , którą zmniejsza moment przechylający przemieszczającej się cieczy $p\eta$. Ponieważ ten pierwszy jest niezależny od stopnia wypełnienia zbiornika, najgorsze wypełnienie wystąpi, gdy praca przemieszczającej się cieczy osiągnie maksimum.

Pracę wykonuje siła ciężkości, dana wzorem $p\zeta = \gamma v\zeta$, gdzie ζ jest pionowym obniżeniem środka ciężkości, zilustrowanym na rys. 32. Na rysunku pokazana jest ciecz w położeniu wyprostowanym i po przechyle o 90° . Widać, że w przypadku zbiornika niesymetrycznego przechył na stronę wzdłużnika jest dużo bardziej korzystny niż w stronę naroża.



Rys. 32. Zmniejszanie stateczności przez swobodne powierzchnie cieczy w zbiorniku

Iloczyn $v\zeta$ przedstawia moment statyczny przemieszczenia cieczy. Wypełnienie zbiornika jest najgorsze, gdy $v\zeta = \max$. Iloczyn ten osiągnie maksimum, gdy dodanie cieczy daje zerowy przyrost $v\zeta$, czyli gdy $d(v\zeta) = 0$. Inaczej mówiąc, gdy dodana warstewka cieczy ma zerowy moment przemieszczenia, czyli gdy środek ciężkości warstewki nie obniża się przy obrocie zbiornika. Tak jest wtedy, gdy swobodna powierzchnia po przechyle przechodzi przez środek ciężkości swobodnej powierzchni w położeniu wyprostowanym. W wypadku zbiornika symetrycznego zachodzi to, gdy zbiornik wypełniony jest w 50 %, natomiast w przypadku zbiorników niesymetrycznych najgorsze wypełnienie zależy od kształtu zbiornika i kierunku przechyłu. Inne jest przy przechyle na stronę środka, a inne przy przechyle na naroże. Znajduje się je numerycznie, w oparciu o powyższe twierdzenie. Tylko w nielicznych przypadkach można znaleźć je analitycznie, gdy obszary zajęte przez ciecz w położeniu wyprostowanym i przechylonym są podobne (zadanie 35 i 36).

Średnia praca wykonana przez ciecz przy przechyłach na obie burty równa się $\frac{1}{2}\gamma v(\zeta_1 + \zeta_2)$. Iloczyn $v(\zeta_1 + \zeta_2)$ przedstawia moment statyczny przemieszczenia cieczy przy obrocie statku od -90° do $+90^\circ$. Analogicznie jak poprzednio, iloczyn ten osiągnie maksimum, gdy dodanie cieczy daje zerowy przyrost momentu przemieszczenia, tj. gdy dodana warstewka nie przemieści się przy obrocie zbiornika o 180° . Ma to miejsce, gdy objętość cieczy będzie stanowiła połowę objętości zbiornika. Twierdzenie to zachodzi dla dowolnego kształtu zbiornika.

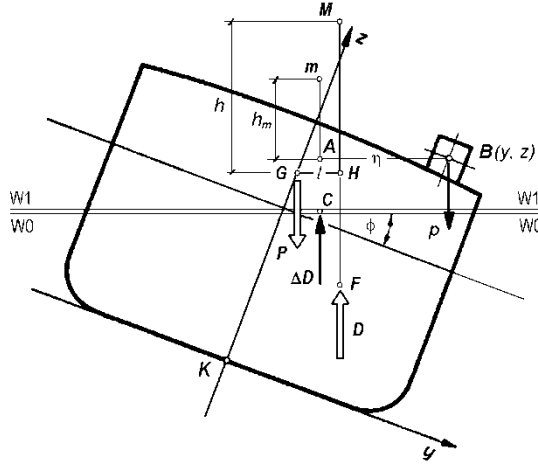
b) Przyjęcie ciężaru

Jeśli na statek przyjmujemy ciężar, to statek osiadzie równolegle, bez przechyłu i przegłębienia, gdy ciężar przyjęty jest na prostej pionowej przechodzącej przez środek pływania C (środek objętości warstwy o grubości ΔT). Jeśli będzie przyjęty w płaszczyźnie wręgowej przechodzącej przez środek pływania poza punktem C , wystąpi czysty przechył, a gdy będzie przyjęty w PS poza punktem C – wystąpi czyste przegłębienie. Zatem, by znaleźć przechył lub przegłębienie, przyjmujemy ciężar na prostej pionowej przechodzącej przez środek pływania C , znajdujemy nową krzywą ramion l_1 dla nowej wyporności $D_1 = D + p$, a następnie przesuwamy ciężar w zadane położenie. Zadanie sprowadza się w ten sposób do zadania o przesuwaniu ciężaru, już omówionego.

Spróbujmy wyznaczyć nowe położenie równowagi bez znajdowania nowej krzywej ramion. Gdyby przy zadanym kącie przechyłu ϕ ciężar znajdował się na linii działania dodatkowej siły wyporu ΔD , przechodzącej przez środek pływania C , na statek działałby

jedynie moment prostujący DI , jak dla statku bez ciężaru, odpowiadający wodnicy $W0$ (rys. 33). Jeśli ciężar będzie odsunięty od tej prostej, pojawi się moment przechylający $p\eta$, gdzie $\eta = AB$ jest poziomą odległością między środkiem pływania a środkiem ciężkości B przyjętego ciężaru (ramieniem działania dodatkowej siły wyporu względem punktu B). Kąt równowagi wynika z równania $DI = p\eta$.

W praktyce to podejście nie jest stosowane, gdyż nie podaje się informacji na temat ramienia kształtu η_k dodatkowej siły wyporu względem wybranego punktu referencyjnego, jak to się robi dla ramienia kształtu siły wyporu. Podejście to ma jednak dużą wartość teoretyczną.



Rys. 33. Przechył wywołany przyjęciem ciężaru

Na okręt z przyjętym ciężarem działa moment prostujący $M = DI - p\eta$. Pochodna momentu prostującego względem kąta przechyłu $^d_{d\phi}M$ nazywa się *współczynnikiem sztywności*. Tak więc:

$$^d_{d\phi}M = D^d_{d\phi}l - p^d_{d\phi}\eta.$$

Wiemy, że $^d_{d\phi}l = h$ jest wysokością metacentryczną, czyli wzniosem metacentrum M nad środkiem ciężkości G (bez uwzględniania przyjętego ciężaru). W analogiczny sposób można pokazać, że $^d_{d\phi}\eta = -h_m$ jest różniczkową wysokością metacentryczną, czyli wzniosem różniczkowego metacentrum m nad środkiem ciężkości B przyjętego ciężaru, co widać bezpośrednio z rys. 33, wziętą z przeciwnym znakiem (znak minus, gdyż η ulega zmniejszeniu przy zwiększeniu kąta przechyłu ϕ). Zatem:

$$^d_{d\phi}M = Dh + ph_m. \quad (30)$$

W położeniu wyprostowanym:

$$h_m = z_m - z,$$

gdzie $z_m = T + \frac{1}{2}\Delta T + r_c$ jest rzędną metacentrum różniczkowego, $z \equiv z_B$ jest rzędną środka ciężkości przyjętego ciężaru, zaś $r_c = \Delta J / \Delta V$ jest różnicowym promieniem metacentrycznym warstwy.

W wyniku przyjęcia ciężaru współczynnik sztywności może zwiększyć się lub zmniejszyć. Przed przyjęciem ciężaru w położeniu wyprostowanym współczynnik ten wynosił Dh_0 , a po przyjęciu $Dh_0 + ph_m$. Zatem zmiana współczynnika równa się ph_m . Wzrasta, gdy $ph_m > 0$, czyli gdy $h_m > 0$, tj. gdy różniczkowa wysokość metacentryczna jest dodatnia, co ma miejsce, gdy $z < z_m$. Przyjęcie ciężaru poniżej różniczkowego metacentrum m zwiększa współczynnik sztywności, a powyżej zmniejsza. Płaszczyzną obojętną jest $z = z_m$.

Wzór (30) pozwala prosto określić nową wysokość metacentryczną po przyjęciu ciężaru, jeśli skorzystać z oczywistej równości $\frac{d}{d\phi} M = D_1 h_1$, gdzie $D_1 = D + p$. Stąd nowa wysokość metacentryczna równa się $h_1 = Dh_0/D_1 + ph_m/D_1$. Po wykonaniu działań:

$$h_1 = h_0 + \frac{p}{D+p} \left(T + \frac{1}{2} \Delta T + r_c - h_0 - z \right),$$

gdzie trzy pierwsze wyrazy w nawiasie oznaczają rzędną metacentrum różniczkowego z_m . Wysokość metacentryczna ulega zwiększeniu w wyniku przyjęcia ciężaru, jeśli wyrażenie w nawiasie jest dodatnie, czyli gdy $z < z_m - h_0$. Płaszczyzna obojętna jest w tym wypadku na wysokości $z = z_m - h_0$.

W przypadku przegłębienia wielkość ph_m jest mała w stosunku do DH_0 , stąd można ją pominąć. Oznacza to, że przyjęcie lub zdjęcie ciężaru nie zmienia wzdłużnego współczynnika sztywności, tj. $D_1 H_1 \cong DH_0$.

Gdy na statek przyjmuje się ładunek ze swobodną powierzchnią, rzędną z w powyższych wzorach należy powiększyć o promień metacentryczny środka ciężkości cieczy. Gdy ładunek jest zdejmowany ze statku, wówczas $p < 0$ należy traktować, jako wielkość ujemną.

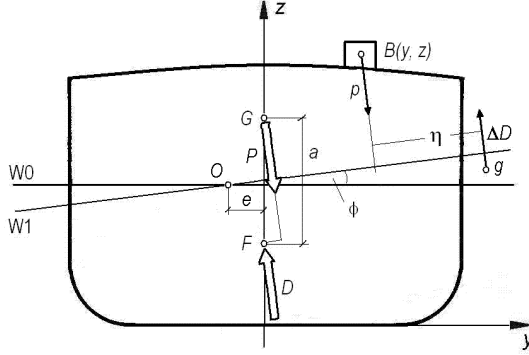
c) Teoria klina

W przypadku małych obrotów, położenie równowagi bardzo wygodnie znajduje się za pomocą teorii klina. Wyporność statku możemy rozdzielić na wyporność do wodnicy W_0 , jak w położeniu wyprostowanym oraz wyporność klina, zawartego między wodnicą W_0 i wodnicą przechyloną W_1 (rys. 34). Klin daje dodatkową wyporność $\Delta D = p$, która przechodzi przez środek ciężkości klina g ; punkt g może znajdować się poza obrębem statku, gdyż jest to wypadkowa dwóch sił przeciwnych: wyporności klina zanurzonego i wynurzonego. Siła wyporu, związana z wypornością do wodnicy W_0 przechodzi przez środek wyporu F dla położenia wyprostowanego. Na statek działają dwie pary sił, które muszą się równoważyć. Mamy zatem dwa równania równowagi, dla sił $v_k \gamma = p$, i momentów:

$$D a \sin \phi = p \eta,$$

gdzie $\eta = (y_g - y) \cos \phi - (z - z_g) \sin \phi$, co wynika z rysunku, v_k jest objętością klina, zaś y_g i z_g są współrzędnymi środka ciężkości klina g . Zauważmy, że gdy $a = 0$, to i $\eta = 0$, co

oznacza, że środek ciężkości przyjętego ciężaru musi znajdować się nad środkiem ciężkości klina. Gdy $a > 0$, to $\eta > 0$, czyli środek ciężkości klina musi być odsunięty w prawo od pionu przechodzącego przez środek ciężkości przyjętego ciężaru. Zakładając mały kąt przechyłu ramię, $\eta = (y_g - y) - (z - z_g)\phi$.



Rys. 34

Objętość (netto) klina równa się iloczynowi pola wodnicy przez drogę, jaką zakreśla środek ciężkości wodnicy podczas jej obrotu. Tak więc: $v_k = Ae\phi$, gdzie e jest odległością punktu obrotu wodnicy od PS (rys. 34). Podstawiając tę wielkość do równania na wyporność klina, otrzymamy: $\gamma Ae\phi = p$, co daje $e\phi = \Delta T$, gdzie $\Delta T = p/A\gamma$ jest przyrostem zanurzenia na skutek przyjęcia ciężaru. Ze wzoru tego wynika, że przy obrocie na prawą burtę, środek obrotu odsunięty jest od środka pływania w stronę lewej burty. Wynik ten można uzyskać z prostej konstrukcji geometrycznej.

Ramię η zależy od współrzędnych środka ciężkości klina g . Współrzędną y_g można obliczyć znając odległość środka ciężkości klina od krawędzi obrotu. Moment statyczny objętości klina względem punktu O wynosi $S_v = J_0\phi$, gdzie J_0 to moment bezwładności wodnicy względem osi obrotu, co wynika z twierdzenia Pappusa-Guldina – wzory (13). W oryginalnym twierdzeniu zakłada się, że figura obracana nie zmienia kształtu. Wodnica nie tyle zmienia kształt, co położenie środka ciężkości podczas obracania. Dla wodnicy W0 środek pływania znajduje się w PS, a dla W1 jest odsunięty od PS o wielkość $r_c\phi$ (rys. 34). Stąd moment bezwładności przekrojów klina zmienia się od $J_x + Ae^2$ dla wodnicy W0 do:

$$J_x + A(e + r_c\phi)^2 \approx J_x + A(e^2 + 2er_c\phi)$$

dla wodnicy W1; wyraz $(r_c\phi)^2$ mogliśmy pominąć, jako mały. Biorąc średnią arytmetyczną otrzymamy, że średni moment bezwładności przekrojów klina $J_0 = J_x + A(e^2 + er_c\phi)$. Zatem odległość środka ciężkości klina od osi obrotu równa się:

$$S_v/v_k = J_0/Ae = e + r_c\phi + J_x/Ae.$$

Tak więc: $y_g = r_c\phi + J_x/Ae$, co wynika z (rys. 34).

Współrzędną z_g środka ciężkości klina, mierzoną od PP, znajdziemy obliczając wpierw

jego odległość od wodnicy W0, oznaczoną przez Δz_g . Moment statyczny objętości klina względem wodnicy W0 wynosi $S_{xy} = \frac{1}{2}\phi^2 J_0$. Zatem:

$$\begin{aligned}\Delta z_g &= S_{xy}/v_k = \frac{1}{2}\phi J_0/Ae = \frac{1}{2}\phi(e + r_c\phi + \phi J_x/A\Delta T) \\ &\approx \frac{1}{2}\phi e \approx \frac{1}{2}\Delta T.\end{aligned}$$

Dwa ostatnie wyrazy odpadają ze względu na ϕ^2 . Tak więc: $z_g = T + \frac{1}{2}\Delta T$.

Możemy teraz przejść do równania drugiego. Przyjmując mały kąt ϕ , otrzymamy:

$$\begin{aligned}Da\phi &= p[(y_g - y) - (z - z_g)\phi], \\ [Da + p(z - z_g)]\phi &= pr_c\phi + pJ_x/Ae - py.\end{aligned}$$

Uwzględniając, że $p/A = \gamma\Delta T = \gamma e\phi$, stąd: $pJ_x/Ae = \gamma J_x\phi$. Zatem równanie równowagi przyjmie ostatecznie postać:

$$\begin{aligned}[\gamma J_x - Da - p(z - z_g) + pr_c]\phi &= py, \\ [Dh_0 + p(T + \frac{1}{2}\Delta T + r_c - z)]\phi &= py,\end{aligned}\tag{31}$$

które wyznacza kąt równowagi ϕ . Wielkość py gra rolę momentu przechylającego, zaś wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest współczynnikiem sztywności, identycznym ze wzorem (30).

Dla przegłębień sprawy wyglądają jeszcze prościej. Wyraz $p(T + \frac{1}{2}\Delta T - z)$ jest mały w porównaniu ze współczynnikiem sztywności podłużnej i można go pominąć. Zastępując moment przechylający py momentem przegłębiającym $p(x - x_c)$, a kąt ϕ kątem θ , równanie (31) przyjmie postać:

$$(DH_0 + pR_c)\theta = p(x - x_c),\tag{32}$$

gdzie wzdłużna wysokość metacentryczna $H_0 = R - a$. Ponieważ a jest znikome w porównaniu do dużego promienia metacentrycznego, można je pominąć. Stąd: $H_0 \approx R$. Uwzględniając ponadto, że $pR_c = \gamma\Delta J_L$, wzór (32) redukuje się do postaci:

$$\gamma J_{L1}\theta = p(x - x_c),\tag{33}$$

analogicznej do wzoru (16), gdzie $J_{L1} = J_L + \Delta J_L$ jest wzdłużnym momentem bezwładności nowej wodnicy, po przyjęciu ciężaru. Założenie $a \approx 0$ oznacza, że przyjęty ciężar znajduje się nad środkiem ciężkości klina wzdłużnego. Ułatwia to znacznie rozwiązywanie szeregu praktycznych zadań, jak w przykładzie 38.

§ 12. Próba przechyłów

Momenty przechylające, wywołane przesuwaniem mas, wykorzystuje się do eksperymentalnego określania położenia środka ciężkości statku, popularnie nazywanego *próbą przechyłów*. Wykonuje się ją po zwodowaniu statku oraz po przebudowie czy większym remoncie statku. Nie da się bowiem wiarygodnie określić położenia środka ciężkości wyłącznie na podstawie obliczeń z uwagi na zmiany konstrukcyjne, jakie mają miejsce podczas budowy czy remontu statku.

Do przechylania statku używa się zwykle czterech ciężarów ułożonych na burtach statku (dwa po jednej i dwa po drugiej burcie). Przenosząc sukcesywnie ciężary z burty na burtę, będziemy mieli sześć kątów przechyłu. Winny być one z przedziału $\langle 1^\circ, 4^\circ \rangle$, co określa ich masę. Równanie na kąt przechyłu ma postać:

$$\begin{aligned} p y \cos \phi &= D h_0 \sin \phi \\ \operatorname{tg} \phi &= p y / D h_0, \end{aligned}$$

gdzie p jest przeniesionym ciężarem, y jest poprzecznym ramieniem przeniesienia ciężaru, h_0 jest początkową wysokością metacentryczną, $D = \gamma(1+k)V$ jest wypornością ciężarową okrętu, zaś k jest współczynnikiem uwzględniającym grubość poszycia i części wystające. Z reguły k jest z przedziału 0,5 do 3%. Im większy statek, tym mniejsze k .

Z równania na moment wynika wzór na początkową wysokość metacentryczną:

$$h_0 = \frac{p y}{D \operatorname{tg} \phi}. \quad (34)$$

Mamy w sumie sześć pomiarów h_0 , trzy dla przechyłów w lewo i trzy w prawo. Znając h_0 , ze wzoru (12) znajdziemy rzędną środka ciężkości: $z_G = z_M - h_0$, gdzie $z_M = z_F + r_0$ jest rzędną metacentrum.

Przed rozpoczęciem próby należy określić wyporność statku, dokonując pomiarów zanurzeń na podstawie znaków zanurzenia na pionach i śródkręciu. Pomiaru zanurzenia na śródkręciu należy dokonywać po obydwu burtach i przyjąć ich średnią arytmetyczną, aby wyeliminować wpływ wstępnego przechyłu statku. Zanurzenie powinno być mierzone z dokładnością do 0,01 m. Jeśli statek jest na równej stępce, wyporność znajdujemy z krzywych hydrostatycznych. W przeciwnym przypadku korzystamy ze skali Bonjeana i linii teoretycznych, uwzględniając ewentualne zgięcie kadłuba w PS, tj. wygięcie (*hogging*) lub ugięcie (*sagging*). Szczegóły w publikacji [7].

Do określenia kątów przechyłu można stosować przyrządy uchylnie (wahadła), naczynia połączone, inklinografy cyfrowe i inne przyrządy specjalne.

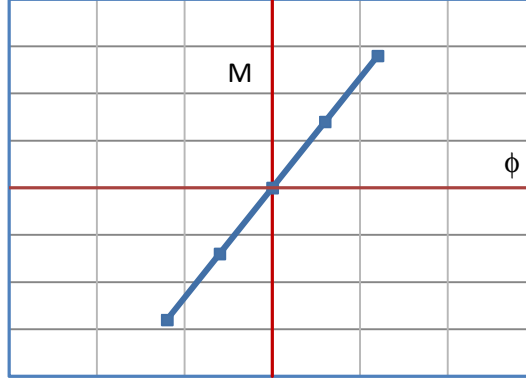
W przypadku wahadła (pionu) długość wahadła powinna być największa z możliwych do zastosowania na danym statku. Na większych statkach nie powinna być mniejsza niż 4÷6 m, a na małych – 1,5 m. Ciężarek pionu należy umieścić w podłużnym zbiorniku z wodą lub olejem, w celu szybkiego tłumienia wahań pionu. Ciężarek powinien być wyposażony w skrzydełka. Kąt przechyłu określa wzór: $\operatorname{tg} \phi \approx \phi = a/l$, gdzie a jest odchyleniem od pionu, zaś l jest długością pionu. Błąd pomiaru kąta nie zależy od wychylenia pionu – patrz zadanie 45.

a) Metoda najmniejszych kwadratów

Jak każdy eksperyment, próba przechyłów powinna zakończyć się oszacowaniem błędu, poprawniej – promienia błędu. Dawniej wysokość metacentryczną określano metodą najmniejszych kwadratów.

W tym celu sporządzano wykres momentu przechylającego $M = p y$ w funkcji kąta przechyłu ϕ (rys. 35). Ze wzoru (34) wynika, że współczynnik kierunkowy tej prostej

równa się Dh_0 . W rzeczywistości, z powodu błędów odczytu punkty pomiarowe nie zawsze układają się na linii prostej. Punkty znacząco oddalone od niej wskazują na nieprawidłowy pomiar. Pomijamy je przy opracowywaniu wyników lub wątpliwy pomiar powtarzamy. Wspólną prostą, zwaną *prostą najmniejszych kwadratów*, prowadzimy tak, by suma kwadratów odchylek od niej była najmniejsza. Zatem:



Rys. 35. Wykres momentu przechylającego M w zależności od kąta przechyłu ϕ

$$\sum_i (M_i - Dh_0 \phi_i)^2 = \min,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich punktach pomiarowych, zazwyczaj sześciu. Różniczkując sumę kwadratów odchylek względem h_0 i przyrównując do zera, otrzymamy równanie: $Dh_0 \sum_i \phi_i^2 = \sum_i M_i \phi_i$. Uwzględniając, że $M_i = Dh_i \phi_i$, otrzymamy:

$$h_0 \sum_i \phi_i^2 = \sum_i h_i \phi_i.$$

Widzimy, że równanie na h_0 nie zależy jawnie od wyporu D ; ma ono postać:

$$h_0 = \frac{\sum_i h_i \phi_i^2}{\sum_i \phi_i^2} = \sum_i c_i h_i, \quad (35)$$

gdzie $h_i = M_i/D\phi_i$ to wysokości metacentryczne dla poszczególnych punktów pomiarowych. Widzimy, że wysokość metacentryczna h_0 wg metody najmniejszych kwadratów jest średnią ważoną h_i z wagami $c_i = \phi_i^2/\sum_i \phi_i^2$. Ponieważ wagi te wzrastają z kątem przechyłu, to największy udział w średniej ważonej mają wysokości dla największych kątów przechyłu. Jak zobaczymy, są one jednocześnie najdokładniejsze.

Obliczmy teraz błąd wysokości metacentrycznej $h_i = M_i/D\phi_i$ dla i -tego pomiaru. Logarytmując wzór i obliczając różniczki, jak w zadaniu 45, otrzymamy:

$$dh_i/h_i = dM_i/M_i - dD/D - d\phi_i/\phi_i.$$

Zamieniając różniczki na różnice oraz pamiętając, że szukamy błędu maksymalnego,

minusy zamieniamy na plusy. Otrzymamy:

$$\Delta h_i/h_i = \Delta M_i/M_i + \Delta D/D + \Delta \phi_i/\phi_i.$$

Widzimy, że błąd względny wysokości metacentrycznej $\Delta h_i/h_i$ jest najmniejszy, gdy mierzone wielkości są największe, czyli dla największego kąta przechyłu.

Dalej, błąd względny równa się sumie błędów względnych czynników. Tak jest zawsze, gdy mamy do czynienia ze wzorem w postaci logarytmicznej (który daje się zlogarytmować). Zatem błąd względny momentu przechylającego $M_i = p_i y_i$:

$$\Delta M_i/M_i = \Delta m/m + \Delta y_i/y_i,$$

gdzie Δm i Δy_i to błąd pomiaru masy przechylającej i ramienia przemieszczenia masy.

Błąd względny wyporności ε_D :

$$\varepsilon_D \equiv \frac{\Delta D}{D} = \frac{\gamma A_{WL} \Delta T}{\gamma V} = \frac{\Delta T}{\kappa T}, \quad (36)$$

gdzie ΔT jest błędem pomiaru zanurzenia statku, zaś κ jest współczynnikiem pełnotliwości pionowej (1).

Błąd względny kąta przechyłu:

$$\Delta \phi_i/\phi_i = \Delta a/a_i$$

równa się błędowi względnemu pomiaru wychylenia pionu (zadanie 45), gdzie Δa jest błędem odczytu wychylenia pionu.

Uwzględniając powyższe, względny maksymalny błąd wysokości metacentrycznej wyrazi się wzorem:

$$\Delta h_i/h_i = \Delta y_i/y_i + \Delta a/a_i + \Delta m/m + \Delta T/\kappa T. \quad (37)$$

b) Średnia arytmetyczna

Obecnie wysokość metacentryczną przyjmuje się jako średnią arytmetyczną indywidualnych wysokości metacentrycznych z poszczególnych pomiarów $h_i = M_i/D\phi_i$:

$$h_0 = \frac{1}{n} \sum_i h_i, \quad (38)$$

gdzie $n = 6$ jest liczbą pomiarów. W odróżnieniu od wzoru (35), wagi $c_i = 1/n$ są tym razem jednakowe, takie same dla pomiarów mniej i bardziej dokładnych. Maksymalny błąd średniej arytmetycznej wysokości metacentrycznych jest równy średniej arytmetycznej błędów poszczególnych pomiarów:

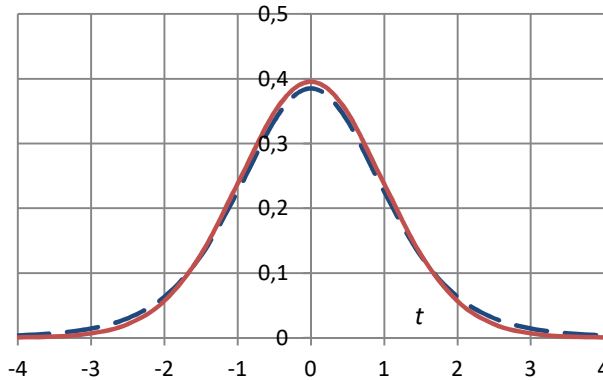
$$\Delta h_0 = (1/n) \sum_i \Delta h_i,$$

gdzie błędy Δh_i dane są wzorem (37).

Jeśli przyjąć, że pomierzone wysokości metacentryczne h_i są losowe o rozkładzie normalnym, to ich średnia arytmetyczna jest zmienną losową o rozkładzie Studenta, symetrycznym względem średniej h_0 i zależnym od liczby pomiarów n . Na rys. 36 pokazana jest funkcja gęstości bezwymiarowego błędu $t = \Delta h_0/s$ dla $n = 8$ (linia przerywana) i dla $n = 30$ (linia ciągła), gdzie s jest parametrem normującym rozkład:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (h_i - h_0)^2}{n(n-1)}}. \quad (39)$$

Parametr ten nie ma nazwy w literaturze – jest on standardowym odchyleniem średniej arytmetycznej od średniej w populacji μ .



Rys. 36. Funkcja gęstości rozkładu Studenta dla $n = 8$ i 30

Ze wzrostem n rozkład Studenta zbiega do rozkładu normalnego. Dla $n \geq 30$ obydwa rozkłady praktycznie pokrywają się ze sobą. Warto podkreślić, że mimo n pomiarów, zmienna t ma rozkład Studenta o $n - 1$ stopniach swobody.

W zastosowaniach interesuje nas promień przedziału błędu o zadanym prawdopodobieństwie p . Dany jest on wzorem:

$$|\Delta h_0| = t_p s, \quad (40)$$

gdzie t_p jest kwantylą rozkładu Studenta dla prawdopodobieństwa $\frac{1}{2}(1 + p)$, czyli funkcją odwrotną do dystrybuanty. Dana jest ona wzorem:

$$t_p = F^{-1}[\frac{1}{2}(1 + p)],$$

gdzie F^{-1} jest funkcją odwrotną do dystrybuanty $F(t)$. W zastosowaniach zwykle przyjmuje się promień przedziału błędu $t_p = 1$. Jeśli chcemy mieć prawie pewność, że wartość rzeczywista znajduje się w przedziale błędu, przyjmujemy $t_p = 3$. Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa t nie wychodzi poza przedział ufności $\pm t_p$, dane jest wzorem:

$$p = 2F(t_p) - 1.$$

Dystrybuanty i funkcje odwrotne dla różnych rozkładów podane są w Excelu w zbiorze funkcji statystycznych. Dla rozkładu Studenta bezwymiarowy promień t_p dla zadanego prawdopodobieństwa p i liczby stopni swobody k wyraża się wzorem:

$$t_p = \text{ROZKŁAD.T.ODW}(1-p; k), \quad (41)$$

gdzie $k = n - 1$, a dla rozkładu normalnego wzorem:

$$t_p = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW}((1+p)/2). \quad (42)$$

Analogicznie, prawdopodobieństwo p dla zadanego promienia przedziału błędu t_p i liczby stopni swobody k dla rozkładu Studenta dane jest wzorem:

$$p = 1 - \text{ROZKŁAD.T}(t_p; k; 2),$$

a dla rozkładu normalnego wzorem:

$$p = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.S}(t_p).$$

Wzory powyższe mają wysoką dokładność. Z ich pomocą łatwo znaleźć bezwymiarowy promień błędu t_p dla dowolnego przedziału ufności p oraz stopni swobody k , czy odwrotnie $-p$ w zależności od t_p . Przykładowe wyniki podane są w tab. 1.

Tab. 1. Bezwymiarowy promień błędu t_p w zależności od przedziału ufności p oraz stopni swobody n

$n = 6$		$n = 8$		rozkład normalny	
p	t_p	p	t_p	p	t_p
0,970	3	0,980	3	0,997	3
0,898	2	0,914	2	0,954	2
0,637	1	0,649	1	0,683	1
0,5	0,727	0,5	0,711	0,5	0,674
0,2	0,267	0,2	0,263	0,2	0,253

c) Uwzględnianie stałych błędów

Standardowe odchylenie s (39) uwzględnia błędy przypadkowe wielkości mierzonych w każdym punkcie pomiarowym i , jak ramiona przeniesienia mas przechyłowych y_i czy wychyleń pionu a_i . Nie obejmuje natomiast błędów wielkości, które mierzone są raz przed wykonaniem próby, jak błąd wyporu okrętu ϵ_D (36) czy mas przechyłających $\Delta m/m$. Powstaje zatem problem, jak uwzględnić stałe błędy w pomiarze wysokości metacentrycznej. Zagadnienie nie jest tak proste, jak wydaje się na pierwszy rzut oka.

Aby lepiej je zrozumieć, rozpatrzmy przepływ prądu zmiennego $i(t)$ przez opornik mający opór R . Chwilowa moc wydzielana na oporniku równa się $i^2 R$. Uśredniona moc równa się $R \langle i^2 \rangle$, gdzie $\langle i^2 \rangle$ jest średnim kwadratem natężenia prądu. Z uwagi na to, że

średnia wartość prądu równa jest zero, średni kwadrat prądu jest zarazem wariancją σ^2 . W elektrotechnice standardowe odchylenie σ nazywa się *wartością skuteczną*.

Rozpatrzmy teraz prąd o natężeniu $i_0 + i(t)$, gdzie i_0 ma stałą wartość, zaś $i(t)$ jest prądem o średniej wartości równej zero. Łatwo pokazać, że:

$$\langle [i_0 + i(t)]^2 \rangle = i_0^2 + \langle i^2 \rangle,$$

tj. że średni kwadrat $[i_0 + i(t)]^2$ równa się sumie kwadratu stałej i średniego kwadratu $\langle i^2 \rangle$. Skoro twierdzenie to działa w elektrotechnice, musi też działać w innych obszarach, jak rachunek błęd. Zatem:

$$\langle (\varepsilon_i + \varepsilon_s)^2 \rangle = \langle \varepsilon^2 \rangle + \langle \varepsilon_s^2 \rangle,$$

gdzie $\varepsilon_i = \Delta h_i/h_0$ jest względnym odchyleniem pomiaru, ε_s jest stałym błędem względnym, $\langle \varepsilon^2 \rangle = (s/h_0)^2$ jest średnim kwadratem względnych odchyłeń pomiarów, zaś $\langle \varepsilon_s^2 \rangle$ jest średnim kwadratem stałego błędu względnego (37). Napisaaliśmy $\langle \varepsilon_s^2 \rangle$, zamiast ε_s^2 , gdyż jest to wielkość losowa dla różnych realizacji, choć stała w danej próbie. Przyjmując prostokątny rozkład prawdopodobieństwa dla tego błędu w przedziale $\langle -\varepsilon_s, \varepsilon_s \rangle$, otrzymamy:

$$\langle \varepsilon_s^2 \rangle = \frac{1}{3} \varepsilon_s^2.$$

Dowód jest prosty. Średniokwadratowy błąd to inaczej wariancja, oznaczana przez σ^2 . W kategoriach mechaniki, wariancja to własny moment bezwładności. Dla jednorodnego pręta o długości $2l$, dla którego gęstość $\rho = \text{const}$, własny moment bezwładności równa się $\frac{1}{3} \rho l^3$. Uwzględniając, że masa pręta $2\rho l = 1$, stąd wariancja $\sigma^2 = \frac{1}{3} l^2$. Podstawiając za $l = \varepsilon$, otrzymamy:

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \varepsilon_s^2.$$

Można pokazać, że gdy wartość stała $\varepsilon_s = \varepsilon_m + \varepsilon_D$ jest sumą dwóch innych stałych błędów względnych, to:

$$\langle (\varepsilon + \varepsilon_m + \varepsilon_D)^2 \rangle = \langle \varepsilon^2 \rangle + \langle \varepsilon_m^2 \rangle + \langle \varepsilon_D^2 \rangle,$$

co zachodzi, gdy błędy ε_m i ε_D są nieskorelowane. Wprowadzając względne odchylenie standardowe wysokości metacentrycznej $\varepsilon_h \equiv s/h_0$, skorygowane względne odchylenie standardowe wysokości metacentrycznej ε próby przechyłów równe jest więc:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_h^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_m^2 + \varepsilon_D^2)}, \quad (43)$$

gdzie $\varepsilon_m \equiv \Delta m/m$ jest błędem względnym mas przechyłowych, zaś ε_D jest błędem względnym wyporu okrętu, danym wzorem (36).

Skorygowane odchylenie standardowe wysokości metacentrycznej $s = \varepsilon h_0$; potrzebne jest do ustalenie przedziału ufności z zadanyim prawdopodobieństwem p .

§ 13. Stateczność dynamiczna okrętu

W zagadnieniach równowagi statycznej, które dotychczas rozpatrywaliśmy, statek znajdował się w spoczynku. W położeniu takim wypadkowa siła czy moment są równe zero. Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy w pewnej chwili zadziałał na statek moment przechylający M_p . Ponieważ moment ten nie będzie w równowadze z momentem prostującym M , statek zacznie się obracać wokół osi wzdłużnej x ; kąt przechyłu $\phi = \phi(t)$ będzie funkcją czasu. Zwykle zakłada się, że przyłożony moment $M_p = M_p(\phi)$ jest funkcją kąta przechyłu ϕ . Jeśli okręt nie przewróci się pod wpływem działającego momentu, statek będzie kołysał się wokół statycznego położenia równowagi ϕ_s , przy którym zachodzi równość obydwu momentów, tj. $M_p(\phi) = M(\phi)$. Ekstremalne wychylenia (przechyły) nazywają się kątem *równowagi dynamicznej*. Jest to kąt, przy którym prędkość kątowa zeruje się, tj. $d\phi/dt \equiv \dot{\phi} = 0$. W położeniu tym prędkość kątowa zmienia znak, czyli zmienia się kierunek przechyłów.

Uprozczone równanie ruchu okrętu pod wpływem przyłożonego momentu jest następujące: $J\ddot{\phi} = M_p(\phi) - M(\phi)$, gdzie J jest momentem bezwładności okrętu wraz z masą wody towarzyszącej względem wzdłużnej osi obrotu. Mnożąc obie strony równania przez $d\phi = \dot{\phi}dt$, otrzymamy:

$$J\ddot{\phi}\dot{\phi}dt = M_p(\phi)d\phi - M(\phi)d\phi.$$

Równanie to daje się łatwo scałkować:

$$\frac{1}{2}J(\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_0^2) = \int_{\phi_0}^{\phi} M_p(\varphi)d\varphi - \int_{\phi_0}^{\phi} M(\varphi)d\varphi.$$

Wyraża ono zasadę zachowania energii: zmiana energii kinetycznej statku równa się pracy działających momentów.

Z reguły przyjmuje się, że $\dot{\phi}_0 = 0$, tzn. że moment przechylający zadziałał w momencie ekstremalnego wychylenia, zaś celem jest znalezienie nowego ekstremalnego wychylenia (kąta równowagi dynamicznej) ϕ_1 . Pomiedzy dwoma kolejnymi wychyleniami ekstremalnymi nie ma przyrostu energii, co prowadzi do równości prac obydwu momentów:

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1} M_p(\phi)d\phi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} M(\phi)d\phi.$$

Inaczej mówiąc, maksymalny kąt przechyłu osiąga wartość, przy której następuje równowaga prac, tj. prace obydwu momentów zrównują się. Powrót w kierunku położenia równowagi nastąpi, jeśli moment przechylający będzie przy tym kącie mniejszy od momentu prostującego, tj. $M_p(\phi_1) < M(\phi_1)$. Kąt równowagi dynamicznej ϕ_1 nie zależy od bezwładności okrętu.

W praktyce wygodnie jest równania powyższe podzielić przez wypór i posługiwać się ramionami. Stąd:

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1} l_p(\phi)d\phi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} l(\phi)d\phi, \quad (44)$$

jeśli $l_p(\phi_1) < l(\phi_1)$, gdzie $l_p(\phi)$ jest krzywą ramienia przechylającego, a $l(\phi)$ jest krzywą ramion prostujących.

Wyznamy teraz czas, po którym okręt osiąga maksymalny przechył. Różniczka czasu $dt = d\phi/\dot{\phi}$. Całkując, otrzymamy:

$$t = \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi/\dot{\phi},$$

gdzie $\dot{\phi}$ jest prędkość kątową, zależną od kąta ϕ , którą wyznacza równanie na energię. Uwzględniając, że $\dot{\phi}_0 = 0$, otrzymamy:

$$\dot{\phi}^2 = 2 \int_{\phi_0}^{\phi} l_p(\theta) d\theta - \int_{\phi_0}^{\phi} l(\theta) d\theta.$$

Moment bezwładności statku wokół osi obrotu często wyraża się jako $J = m\rho_x^2$, gdzie m jest masą statku, zaś ρ_x jest wirtualnym promieniem bezwładności statku wraz z masą wody towarzyszącej. Stąd iloraz $D/J = g/\rho_x^2$. Jak widać czas, po którym osiągnięty zostanie maksymalny przechył, zależy od promienia bezwładności statku. Im większy ten promień, tym dłuższy czas, po którym osiągnięty zostanie maksymalny przechył, który sam nie zależy od promienia bezwładności. Ruchy statku stają się coraz wolniejsze, co korzystnie wpływa na właściwości morskie okrętu.

Całka we wzorze na czas jest niewłaściwa, gdyż na krańcach przedziału całkowania funkcja podcałkowa $1/\dot{\phi}$ ma asymptoty pionowe; dla $\phi \rightarrow \phi_0$ oraz $\phi \rightarrow \phi_1$, $\dot{\phi} \rightarrow 0$. Tym niemniej jest to całka zbieżna. Asymptoty wykluczają stosowanie metod na całkowanie funkcji regularnych, jak metoda Simpsona. Tym niemniej można ją łatwo obliczyć numerycznie, uwzględniając osobliwości, jak w metodzie Gaussa-Czebyszewa.

Do oceny bezpieczeństwa statku wprowadza się pojęcie współczynnika bezpieczeństwa statecznościowego K . Statek uważa się za bezpieczny, jeśli $K > 1$. Współczynnik ten mówi, ile razy możemy zwiększyć krzywą ramienia przechylającego, by statek nie przewrócił się, tzn. by jeszcze mogła zajść równowaga prac.

Wyznaczanie maksymalnego przechyłu i współczynnika bezpieczeństwa omówimy na przykładzie statku kołyszącego się podczas sztormu ze znaną amplitudą ϕ_a , na który w pewnym momencie zadziałał moment przechylający, wywołany uderzeniem wiatru o znany ramię przechylającym $l_p = M_p/D = \text{const}$, niezależnym od kąta przechyłu. Amplitudę ϕ_a i moment od wiatru M_p podają przepisy towarzystw klasyfikacyjnych, a także IMO (procedury są różne). W przepisach PRS [6] zakłada się, że wiatr zadziałał w najgorszym momencie, gdy statek był maksymalnie wychylony na nawietrzną, z amplitudą ϕ_a mierzona od położenia wyprostowanego, tj. $\phi_0 = -\phi_a$. Zadanie rozwiązuje się wykreślnie. Równość całek, danych wzorem (44), wyraża się graficznie równością pól ABC i CDE (rys. 37), co łatwo wydedukować. Na odcinku BC statek jest rozpędzany, a na odcinku CE – wyhamowywany. Prosta ED określa kąt równowagi dynamicznej ϕ_1 , tj. maksymalny kąt przechyłu wywołany uderzeniem wiatru. Punkt C określa kąt równowagi statycznej ϕ_s , wokół którego statek będzie się kołysał.

Porównywanie pól jest niewygodne. Dlatego zadanie wygodniej jest rozwiązać za pomocą krzywych całkowych, jakie wynikają ze wzoru (44). Kąt ϕ_1 wyznacza punkt

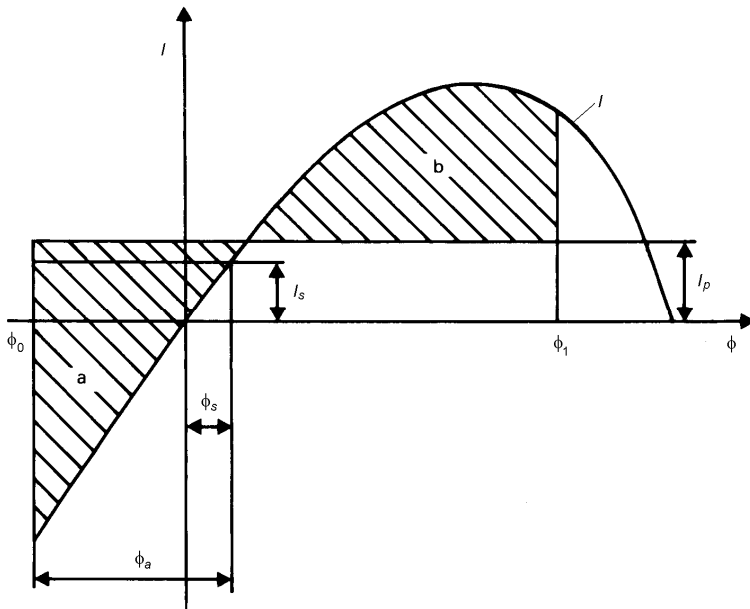
mówiąc, wymaga ono, by statek kołyszący się na fali nie przewrócił się pod wpływem uderzenia wiatru.

Według IMO kryterium pogody wygląda nieco inaczej [5]. IMO przyjmuje, że na kołyszący się na fali statek działa moment przechylający o ramieniu l_s , wywołany statycznym działaniem wiatru. W związku z czym statek kołysze się nie wokół położenia wyprostowanego, jak w kryterium PRS, lecz wokół statycznego kąta przechyłu ϕ_s , wywołanego przez wiatr. W najmniej korzystnym momencie, gdy statek jest przechylony maksymalnie na nawietrzną, tj. gdy kąt przechyłu $\phi_0 = \phi_s - \phi_a$ następuje uderzenie szkwału, które zwiększa ramię przechylające o 50%, tj. $l_p = 1,5 l_s$. Kryterium wymaga, by w tych warunkach statek się nie wywrócił.

Zadanie rozwiązuje się analogicznie, jak poprzednio. Schemat ideowy pokazany jest na rys. 38.

Maksymalny przechył dynamiczny ϕ_1 wyznacza równość pól a i b . Kąt ϕ_1 i krytyczne ramię przechylające znacznie łatwiej wyznacza się na wykresie ramion dynamicznych, analogicznie jak poprzednio. IMO narzuca ograniczenie na statyczny kąt przechyłu od wiatru ϕ_s oraz przechył dynamiczny ϕ_1 . Ten pierwszy nie powinien przekraczać 16° lub 80% kąta wejścia pokładu do wody, a ten drugi nie powinien przekraczać kąta zalewania ϕ_{zal} lub 50° .

Kryterium pogody jest wymiarujące dla statków o dużej powierzchni nawiewu, jak statki pasażerskie, promy, kontenerowce, samochodowce itp.



Rys. 38. Kryterium pogody wg IMO

§ 14. Stateczność okrętu przy zetknięciu z dnem

Dotychczas rozpatrywaliśmy statek swobodnie pływający. Bywają jednak sytuacje, gdy statek styka się z dnem, jak to ma miejsce podczas dokowania lub wejścia na mieliznę. To pierwsze jest zamierzone, a to drugie nie. W każdym wypadku zetknięcie się z dnem powoduje zmniejszenie lub utratę stateczności, a więc może zagrażać bezpieczeństwu statku.

a) Dokowanie

Przyjmijmy, iż okręt wprowadzony do doku pływającego dotknie w pewnej chwili podpór na całej długości stępki. Dalsze wynurzenie się doku pociąga za sobą wynurzenie się statku, tym samym zanurzenie T_1 i wypór D_1 staną się mniejsze, niż przy pływaniu swobodnym. Ubytek wyporu musi być zrównoważony przez nacisk podpór na stępkę Q , przy czym $D = D_1 + Q$, gdzie D jest wyporem przy pływaniu swobodnym, równym ciężarowi statku P . Podparcie od dołu zmniejsza stateczność statku, co można pokazać ściśle.

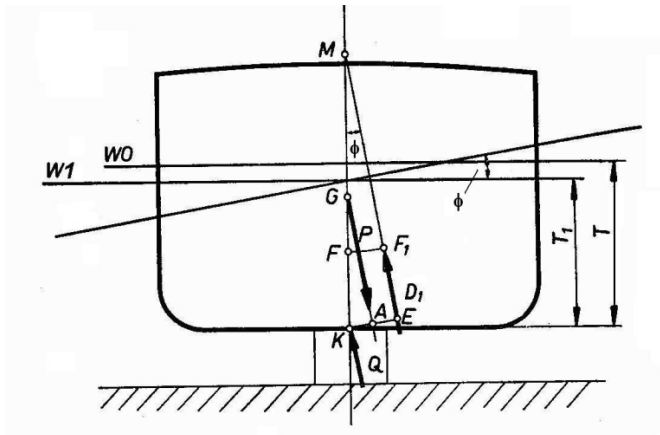
Jeśli z jakiegokolwiek powodu częściowo wynurzony statek przechyli się o niewielki kąt ϕ (rys. 39), wówczas moment działających sił wyrazi się wzorem:

$$M = (D_1 z_M - P z_G) \sin \phi, \quad (45)$$

gdzie z_M jest rzędną metacentrum dla zanurzenia bieżącego T_1 . Jest to moment prostujący, którego wartość nie zależy od przyjętego bieguna. Podstawiając do powyższego równania $D_1 = D - Q$ oraz uwzględniając, że kąt ϕ z definicji jest mały, otrzymamy:

$$M = (Ph_0 - Qz_M)\phi = K\phi,$$

gdzie $h_0 = z_M - z_G$ jest początkową wysokością metacentryczną dla zanurzenia bieżącego. Wyrażenie w nawiasie $Ph_0 - Qz_M \equiv K$ jest bieżącą sztywnością poprzeczną statku. Jeśli sztywność $K > 0$ jest dodatnia, statek jest stateczny.



Rys. 39. Okręt w doku

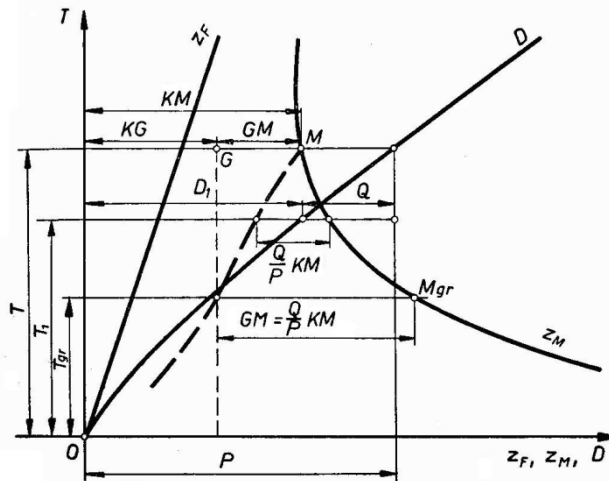
Przy zmniejszaniu się zanurzenia sztywność K monotonicznie maleje, maleje bowiem pierwszy wyraz we wzorze (45), podczas gdy drugi jest stały. Widać to natychmiast, jeśli wyraz ten przedstawić w postaci:

$$D_{1z_M} = \gamma(M_z + J_B),$$

gdzie M_z jest momentem statycznym wyporności względem PP, zaś J_B jest momentem bezwładności wodnicy. Obydwa wyrazy maleją ze zmianą zanurzenia.

A zatem w czasie wynurzenia się okrętu sztywność K maleje, osiągając zerową wartość, gdy $Ph_0 = Qz_M$, a następnie przyjmuje wartości ujemne, co sprawia, że równowaga okrętu jest chwiejna. Okręt dokowany należy więc podeprzeć podporami bocznymi najpóźniej w chwili zerowania się sztywności K . W przeciwnym razie, może się przewrócić pod działaniem nawet niewielkiej siły, np. podmuchu wiatru.

Graniczne zanurzenie okrętu T_{gr} , przy którym sztywność zeruje się, łatwo znajduje się wykreślnie z pomocą krzywych hydrostatycznych (rys. 40). Dla kolejnych zanurzeń odkładamy wartości $(Q/P)z_M$ w lewo od krzywej $z_M = KM$, poczynając od zanurzenia początkowego T . Odległość krzywej z_M od prostej $z = z_G \equiv KG$ wyznacza bieżącą wysokość metacentryczną h_0 . Przecięcie się przerywanej krzywej ze wspomnianą prostą pionową wyznacza poszukiwane zanurzenie graniczne T_{gr} , przy którym sztywność $K = 0$ zeruje się, tj. $h_0 = (Q/P)z_M$.



Rys. 40. Wyznaczanie granicznego zanurzenia okrętu

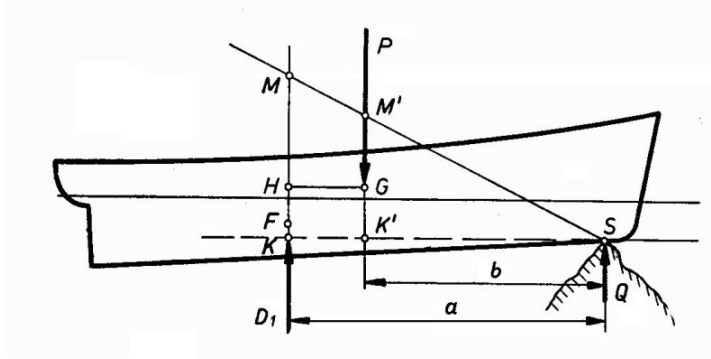
b) Punktowe zetknięcie okrętu z dnem w PS

Typowym przykładem zetknięcia okrętu z dnem w jednym punkcie jest wpadnięcie okrętu na skałę. Powoduje ono częściowe wynurzenie się okrętu, połączone z naciskiem na dno i zmianą przegłębienia, a więc i z przesunięciem środka wyporu (rys. 41). Również i w tym wypadku podparcie statku od dołu wywoła zmniejszenie stateczności.

Siły działające na okręt muszą spełniać równania równowagi:

$$D_1 + Q = P, \quad D_1 a = Pb.$$

Moment prostujący przy przechyle o mały kąt ϕ wyraża się analogicznym wzorem, jak poprzednio $M = (D_1 \cdot KM - P \cdot K'G)\phi$. Podstawiając za $D_1 = Pb/a$, otrzymamy:



Rys. 41. Punktowe podparcie okrętu na dnie

$$M = P(b/a \cdot KM - K'G)\phi.$$

Z podobieństwa trójkątów SKM i $SK'M'$ (rys. 41) wynika, że $b/a = K'M'/KM$. Stąd:

$$M = P(K'M' - K'G)\phi = P \cdot GM'\phi. \quad (46)$$

Równanie powyższe uwidacznia fakt zmniejszenia się stateczności okrętu osadzonego na skale. Poprzeczna wysokość metacentryczna wyraża się bowiem nie odcinkiem HM , lecz mniejszym odcinkiem GM' . Punktowe podparcie okrętu wpływa zatem na stateczność w taki sposób, jakby metacentrum okrętu przesunęło się z punktu M do punktu M' . Jeśli prosta MS przebiegnie poniżej środka ciężkości G , okręt przechyli się, a nawet może się przewrócić. Sytuacja ta wystąpi tym łatwiej, im punkt podparcia okrętu leży bliżej środka ciężkości.

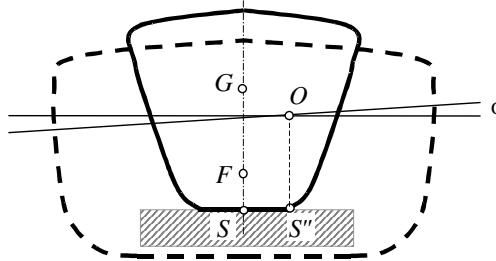
Z powyższych rozważań wynika, że dla okrętu, który wpadł na skałę, same już tylko warunki statyczne stwarzają poważne niebezpieczeństwo jego zatonięcia na skutek utraty stateczności, niezależnie od dodatkowych czynników, jak wiatr, fala czy zatopienie niektórych przedziałów, na skutek utraty integralności dna. Równocześnie zagraża okrętowi niebezpieczeństwo przełamania się z powodu wystąpienia w kadłubie zbyt wielkich naprężeń zarówno od sił statycznych, jak i dynamicznych.

c) Krawędziowe podparcie okrętu na dnie

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy skała jest płaską półką w punkcie podparcia S , która styka się z dnem statku o szerokości $2y_0$ (rys. 42). Na okręt działają te same siły, co poprzednio: wypór D_1 , ciężar okrętu P i reakcja Q w miejscu podparcia (rys. 41). Gdy

okręt jest w położeniu wyprostowanym, wypadkowa reakcji podłoża przechodzi przez punkt S w PS.

Podczas przechyłu reakcja przesuwą się z punktu S do punktu S'' na skraju podparcia (odcinek $SS'' = y_0$), zaś wodnica obraca się wokół punktu O . W tym wypadku obrót nie jest równoobjętościowy, co wpływa na reakcję podłoża i wypór. Ciężar statku nie zmienia się, stąd: $\Delta D = -\Delta Q$, czyli zmiana wyporu równa się zmianie reakcji z przeciwnym znakiem. Z kolei zmiana wyporu wynika ze zmiany objętości klina: $\Delta D = \gamma \Delta v$, danej wzorem Pappusa-Guldina (13). Z uwagi na symetrię wodnicy, środek wyporu F przemieszcza się prostopadłe do PS. Zatem, jak poprzednio na przechylony statek działają trzy siły: siła wyporu $D_1 + \Delta D$, siła ciężkości P i reakcja podłoża $Q - \Delta D$. Ponieważ siła ciężkości $P = D_1 + Q$, moment prostujący możemy obliczyć jako wypadkową *trzech* par sił: siły wyporu D_1 , jak w położeniu wyprostowanym, przechodzącej przez środek wyporu w położeniu wyprostowanym i przeciwnej jej siły D_1 , przechodzącej przez środek ciężkości G , siły Q przyłożonej w środku ciężkości G i przeciwnej jej reakcji Q przyłożonej w punkcie S'' oraz dodatkowej siły wyporu ΔD , wywołanej przechyłem statku o kąt ϕ , przechodzącej przez środek ciężkości klina i dodatkowej reakcji ΔQ , przyłożonej w punkcie podparcia S'' .



Rys. 42

Pierwsza para daje moment równy $-D_1 a \phi$, gdzie $a = FH$ jest pionową odległością środka ciężkości G od środka wyporu F w położeniu wyprostowanym (rys. 41). Znak minus oznacza, że jest to moment przechylający, działający zgodnie z przechyłem.

Drugi moment równa się $Q(y_0 - KH\phi)$, zaś trzeci $\Delta D(y_k - OS''\phi) \approx \Delta D y_k$, gdzie y_k jest odległością środka ciężkości klina od krawędzi O , zaś OS'' jest zanurzeniem statku w punkcie podparcia. Wyraz $\Delta D OS''\phi \approx 0$ można opuścić – jest małą drugiego rzędu.

Ze wzorów Pappusa-Guldina wynika, że objętość klina:

$$\Delta v = M_0 \phi,$$

zaś moment statyczny objętości klina:

$$\Delta M_v = J_0 \phi,$$

stąd odległość środka objętości klina od krawędzi klina wynosi:

$$y_k = \Delta M_v / \Delta v = J_0 / M_0,$$

gdzie $M_0 = -A_{WL}y_0$ oraz $J_0 = J_B + A_{WL}y_0^2$ są to moment statyczny i moment bezwładności wodnicy względem krawędzi klina O . Stąd:

$$\Delta D y_k = \gamma \Delta v y_k = \gamma M_0 \phi J_0 / M_0 = \gamma J_0 \phi = \gamma (J_B + A_{WL}y_0^2) \phi.$$

Sumując wspomniane trzy momenty oraz grupując odpowiednie wyrazy, otrzymamy:

$$\begin{aligned} M &= -D_1 a \phi + Q(y_0 - KH \phi) + \gamma (J_B + A_{WL}y_0^2) \phi = \\ &= -D_1 a \phi + Q y_0 - (P - D_1) KH \phi + \gamma J_B \phi + \gamma A_{WL}y_0^2 \phi = \\ &= \gamma (J_B - V_1 a + V_1 KH) \phi - P KH \phi + \gamma A_{WL}y_0^2 \phi + Q y_0. \end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias wyporność V_1 oraz podstawiając w drugim wyrazie $KH = K'G$ (rys. 41), otrzymamy:

$$M = D_1(r_0 - a + KH) \phi - P \cdot K'G \phi + \gamma A_{WL}y_0^2 \phi + Q y_0.$$

Wyrażenie w nawiasie $r_0 - a + KH$ jest równe KM , tj. pionowej wysokości metacentrum nad punktem podparcia S , co widać z rys. 41. Tak więc:

$$\begin{aligned} M &= D_1 \cdot KM \phi - P \cdot K'G \phi + \gamma A_{WL}y_0^2 \phi + Q y_0 = \\ &= P \cdot GM' \phi + \gamma A_{WL}y_0^2 \phi + Q y_0. \end{aligned}$$

gdyż dwa pierwsze wyrazy są identyczne, jak przy podparciu punktowym, dane wzorem (46). Ostatecznie więc:

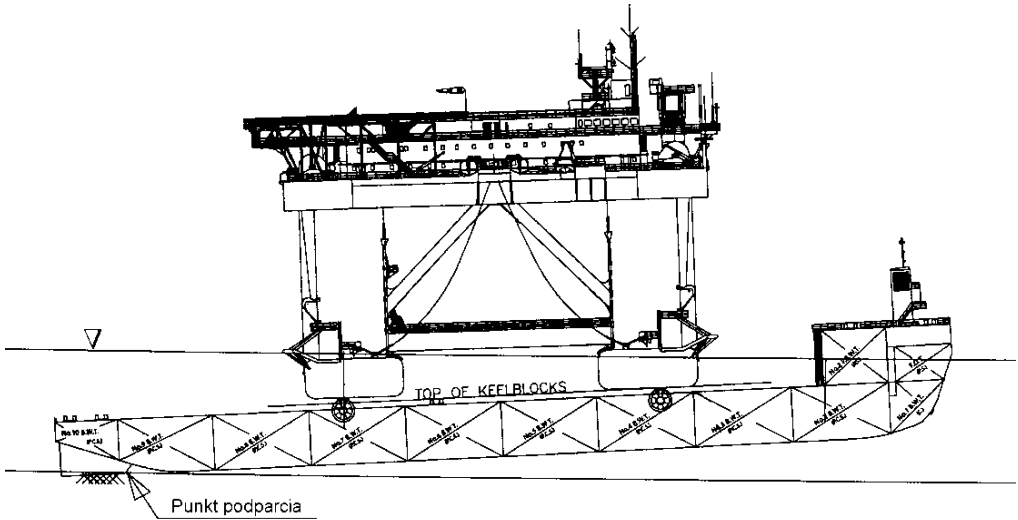
$$M = (P \cdot GM' + \gamma A_{WL}y_0^2) \phi + Q y_0. \quad (47)$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia sztywność statku względem przechyłów poprzecznych. Jest ona większa niż w poprzednim przypadku o wielkość $\gamma A_{WL}y_0^2$. O sztywności można jednak mówić, gdy moment przechylający jest większy od wartości progowej $Q y_0$. W przeciwnym wypadku okręt nie doznaje żadnych przechyłów. Jest to cecha konstrukcji posadowionych. Im szersze podparcie $2y_0$, tym większa wartość progowa.

Rozważania powyższe nie tracą na znaczeniu, gdy punkt podparcia S jest na rufie. Barki do dokowania platform mają na rufie specjalne skegi, symetryczne względem PS, na których wspierają się o dno akwenu podczas załadunku platformy na pokład, jak na rys. 43. Zatapianie barki do pozycji załadunkowej odbywa się grawitacyjnie. Po załadunku barka zaczyna się wynurzać, wyrzucając wodę balastową ze zbiorników balastowych za pomocą sprężonego powietrza.

Stateczność barki spada w momencie oderwania od dna, gdyż znika wartość progowa posadowienia $Q y_0$. Najbardziej niebezpieczny moment podczas wynurzania występuje, gdy pokład barki jest jeszcze pod wodą, natomiast dno pływaków platformy jest nad wodą. By nie dopuścić do nadmiernego spadku wodnicy, w momencie wynurzania się pokładu musi być pewne przegłębienie. To samo dotyczy zanurzania się z platformą,

by ją wydokować. W pozycji roboczej barka pływa na równej stępce, z wodnicą poniżej pokładu.



Rys. 43. Dokowanie platformy na barkę

Projekt 1 – Uproszczona skala Bonjeana

Dla statku cylindrycznego o stałym przekroju wręgowym wykonać fragmentaryczną skalę Bonjeana, tj. wykreślić krzywą pola powierzchni A_{wr} i momentu statycznego wręgu S_{wr} w funkcji zanurzenia, jak na skali Bonjeana.

Dane: szerokość całkowita na pokładzie $B = 8$ m, $B/H = 1,8 \div 2$, gdzie H jest wysokością boczną, współczynnik pełnotliwości całego przekroju wręgowego $\beta = 0,55 \div 0,875$. Przyjąć, że wręg ma kształt potęgowej, określony wzorem: $y = \frac{1}{2}B(z/H)^k$.

Jedyną niewiadomą w równaniu wręgu jest wykładnik k , który powiązany jest ze współczynnikiem pełnotliwości wręgu β . Jak wynika z rozważań o potęgowej krzywej powierzchni wodnic w § 5, wykładnik $k = 1/\beta - 1$. Dla $\beta \in (1/2, 1)$, $k \in (0, 1)$ jest wykładnikiem ułamkowym. Przykładowo, gdy $\beta = 2/3$, to $k = 1/2$, czyli wręg jest krzywą pierwiastkową.

Powierzchnia wręgu w funkcji zanurzenia z dana jest wzorem:

$$A_{wr} = 2 \int_0^z y dz' = A_0 (z/H)^{k+1},$$

gdzie $A_0 = BH\beta$ jest polem całego wręgu, zaś moment statyczny wręgu względem PP w funkcji z dany jest wzorem:

$$S_{wr} = 2 \int_0^z z' y dz' = S_0 (z/H)^{k+2},$$

gdzie $S_0 = A_0 H / (\beta + 1)$ jest momentem statycznym całego wręgu względem PP. Wyprowa-

dzenie obydwu wzorów jest elementarne. Krzywa momentu statycznego jest o rząd wyższa od krzywej powierzchni wręgu. Środek ciężkości takiego wręgu $z_c = S_{wr}/A_{wr} = z/(\beta+1)$ jest wprost proporcjonalny do zanurzenia wręgu.

Projekt 2 – Obliczenie krzywej ramion metodą Kryłowa-Dargniesia

Wykonać obliczenie krzywej ramion prostujących dla pontonu o stałym przekroju trapezowym dla przechyłów $\phi \in (0, 90^\circ)$. Szerokość pokładu B , stosunek B/H i współczynnik pełnotliwości całego przekroju wręgowego β jak w projekcie 1, $H/T = 1,5 \div 1,8$, gdzie T jest zanurzeniem pontonu. Wodnice równoobjętościowe prowadzić z możliwie równym krokiem kąta $\Delta\phi \leq 10^\circ$ tak, by przechodziły przez krawędź pokładu i obło.

Na I arkuszu formatu A3 w układzie poziomym należy znaleźć wodnice równoobjętościowe, środki ciężkości wodnic (środki pływania) C i promienie metacentryczne r . Rysunek zaczynamy od narysowania przekroju poprzecznego w możliwie dużej znormalizowanej skali, dopasowanej do wielkości arkusza, i zaznaczenia wodnicy konstrukcyjnej. Z podanych stosunków wymiarowych wynika wysokość boczna H , zanurzenie T , a współczynnik pełnotliwości β definiuje szerokość dna. Promień metacentryczny dany jest wzorem $r = B^3/12A_0$, gdzie B jest szerokością wodnicy przechylonej, pomierzonej z rysunku, zaś A_0 jest polem zanurzonej części wręgu, która jest stała w trakcie przechylania. Wszystkie wielkości przeliczamy na wielkości rzeczywiste.

Rysujemy krzywą środków pływania, po której toczą się wodnice równoobjętościowe. Krzywa ta ma ostrza przy kącie wejścia pokładu do wody i kącie wyjścia obła z wody. Zaznaczamy różniczkowe metacentrum początkowe m_0 (rys. 23) i rysujemy łuk koła o promieniu r_c – początkowym różniczkowym promieniu metacentrycznym, dla porównania z przebiegiem krzywej środków pływania w początkowym zakresie stateczności. Ponadto znajdujemy wodnicę W_{90° z obliczeń geometrycznych i nanosimy ją na rysunek, dla zobrazowania dokładności obliczeń. Różnica między tą wodnicą i wodnicą z metody Kryłowa-Dargniesia powinna być w skali rysunku ułamka milimetra. Dodatkowo zaznaczamy położenie środka wyporu w położeniu wyprostowanym.

Na II arkuszu formatu A4 w układzie pionowym rysujemy wykres *biegunowy* ramion siły wyporu, jak na rys. 19. Rysunek zaczynamy od narysowania krzywej środków wyporu i ewoluty metacentrycznej, a następnie krzywej ramion kształtu l_k ; jako punkt referencyjny obieramy środek wyporu w położeniu wyprostowanym F_0 (zamiast punktu K). Środek ciężkości G przyjmujemy na takiej wysokości w PS, by zakres krzywej ramion wynosił 60° , czyli w punkcie przecięcia PS przez linię działania siły wyporu przy kącie przechyłu 60° . Gdyby początkowa wysokość metacentryczna h_0 była mniejsza niż 0,25 m, środek ciężkości obniżamy, by $h_0 = 0,25$ m. Znając położenie środka ciężkości, możemy narysować półokrąg oparty na średnicy GM_0 , krzywą ramion prostujących l oraz krzywą ramion dynamicznych l_d . Wykresy biegunowe ramion siły wyporu, tj. ramienia prostującego l i ramienia kształtu l_k muszą być styczne do ewoluty. Punkt styczności wyznacza maksymalne ramię. Dla pozostałych kątów, wykres przecina linię działania siły wyporu pod kątem α , pod którym widać ze środka ciężkości okrętu pochodną ramienia, tj. wysokość metacentrum nad ramieniem (rys. 20).

Na III arkuszu formatu A4 w układzie poziomym na jednym rysunku rysujemy pięć krzywych w *układzie kartezjańskim*: krzywą ramion prostujących l , wysokość metacentryczną h , ramię dynamiczne l_d , dodatkowe ramię kształtu Δl_k , jak na rys. 21, w oparciu dane z arkusza II, oraz krzywą ramion dodatkowej siły wyporu l_c , w oparciu o dane z arkusza I.

Ćwiczenia

1. Statek o danych, jak w zadaniu (2), wpływa do portu rzecznego. Obliczyć zmianę zanurzenia ΔT .

R o z w i ą z a n i e: najpierw obliczamy współczynnik pełnotliwości pionowej κ wg wzoru (1). Podstawiając dane, otrzymamy $\kappa = 0,7368$. Korzystając następnie ze wzoru (6), uwzględniając dane otrzymamy $\Delta T = 0,147$ m, tj. po wejściu do portu nastąpi wzrost zanurzenia o całkiem sporą wielkość prawie 15 cm.

2. Ze statku o zanurzeniu $T = 8$ m, polu wodnicy $A_{WL} = 950$ m², wyporności $V = 5600$ m³, pływającego w wodzie o gęstości $\rho = 1,025$ g/cm³ zdjęto ciężar o masie $m = 200$ t. Obliczyć zmianę zanurzenia ΔT :
 - a) według wzoru dla burt pionowych,
 - b) zakładając, że współczynnik pełnotliwości pionowej $\kappa = const$,
 - c) obliczyć z_F , zakładając, że $\kappa = const$.
3. Dla holownika portowego znana jest krzywa wyporności podana w poniższej tabeli. Obliczyć rzędną środka wyporu z_F dla $V = 100$ m³.

V [m ³]	0	10	20	40	60	80	100
z [m]	-0,20	0,50	0,78	1,15	1,46	1,75	2,01

O d p o w i e d ź: $z_F = 1,24$ m.

4. Dana jest krzywa wyporności statku, jak w poniższej tabeli. Wodnica W4 jest wodnicą konstrukcyjną. Zanurzenie konstrukcyjne statku $T = 7,00$ m. Obliczyć rzędną środka wyporu z_F dla zanurzenia konstrukcyjnego.

	W0	W $\frac{1}{2}$	W1	W2	W3	W4
V [m ³]	0	250	700	2100	4100	6600

O d p o w i e d ź: $z_F = 4,35$ m.

5. Wykazać, że znając wykres współczynnika pełnotliwości pionowej $\kappa(z)$, wyporność objętościowa wyraża się wzorem:

$$V(z) = V_0 \exp \int_{z_0}^z \frac{dx}{x\kappa(x)}.$$

6. Wykazać, że wykres rzędnej środka wyporu $z_F(z)$ zależy wyłącznie od przebiegu wykresu współczynnika pełnotliwości pionowej $\kappa(z)$ i wyraża się wzorem:

$$z_F(z) = \int_0^z \frac{1}{\kappa(y)} \left[\exp \int_z^y \frac{dx}{x\kappa(x)} \right] dy.$$

7. Aproksymacja ćwiartki wodnicy funkcją potęgową ma postać: $y = \frac{1}{2}B[1 - (x/x_0)^n]$, gdzie $x_0 = \frac{1}{2}L$ jest połową długości wodnicy. Pokazać, że:

- a) wykładnik $n = \alpha/(1 - \alpha)$, gdzie α jest współczynnikiem pełnotliwości wodnicy,
b) poprzeczny moment bezwładności wodnicy wyraża się wzorem $J_x = c_x LB^3$, gdzie:

$$c_x = \frac{\alpha^3}{2(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)}.$$

Dla prostokąta, $\alpha = 1$, wzór daje $c_x = \frac{1}{12}$, tak jak powinno być.

- c) wzdłużny moment bezwładności wodnicy wyraża się wzorem $J_y = c_y BL^3$, gdzie:

$$c_y = \frac{1}{12}\alpha(3 - 2\alpha).$$

Dla prostokąta, $\alpha = 1$, wzór daje $c_y = \frac{1}{12}$, jak powinno być.

8. Pokazać, że w przypadku pontonu prostopadłościennego:

- a) metacentrum początkowe M_0 jest najniżej położone, gdy zanurzenie $z = z_{\min} \equiv B/\sqrt{6}$ i że znajduje się wówczas na wodnicy, tj. $z_M = z_{\min}$. Dla innych zanurzeń $z \neq z_{\min}$, rzędna metacentrum $z_M > z_{\min}$ jest większa od wartości minimalnej.
b) metacentrum znajduje się nad wodnicą, tj. $z_M > z$, gdy zanurzenie $z < z_{\min}$. W przeciwnym wypadku jest pod wodnicą.

9. Jednorodna belka prostopadłościenna o gęstości ρ_c pływa w cieczy o gęstości ρ .

- a) Jaki musi być stosunek szerokości do wysokości belki B/H , aby pływała bez przechyłu?
b) Przy jakim stosunku B/H belka będzie pływała bez przechyłu, niezależnie od stosunku gęstości?
c) Jaka musi być minimalna długość belki?

O d p o w i e d z i: a) $(B/H)^2 > 6\rho_c/\rho(1 - \rho_c/\rho)$, b) $B/H > \sqrt{1,5} \approx 1,22$, c) $L > B$.

10. Kiedy jednorodny walec o promieniu R i wysokości H :

- a) Może pływać w pozycji pionowej?
b) Przy jakim stosunku R/H walec będzie pływał bez przechyłu, niezależnie od stosunku gęstości?

O d p o w i e d z i: a) $(R/H)^2 > 2\rho_c/\rho(1 - \rho_c/\rho)$, b) $2R/H > 2^{1/2}$, czyli przekrój osiowy walca przy minimalnym stosunku ma proporcje kartki formatu A w układzie poziomym.

11. Ile należy wlać wody do naczynia cylindrycznego wykonanego z cienkiej blachy, aby pływało w pozycji wyprostowanej? Dane: pole podstawy $A = 1,131 \text{ m}^2$, rzędna środka ciężkości naczynia pustego $z_G = 1,80 \text{ m}$, a masa naczynia $m_0 = 200 \text{ kg}$, gęstość wody $\rho = 1,02 \text{ g/cm}^3$. Czy ma znaczenie kształt przekroju poprzecznego naczynia?

W s k a z ó w k a: Zauważmy, że odległość powierzchni wody w naczyniu od powierzchni wody na zewnątrz nie zmienia się podczas wlewania wody i równa jest zanurzeniu naczynia pustego T_0 . Wody należy wlać tyle, aż środek wyporu równoważący ciężar naczynia pustego znajdzie się powyżej środka ciężkości naczynia pustego.

O d p o w i e d z: głębokość wody w naczyniu $h > 1,713 \text{ m}$, zaś objętość $v > 1,938 \text{ m}^3$.

12. Walec, wykonany z cienkiej blachy, ma średnicę $2R = 1 \text{ m}$, wysokość $H = 2 \text{ m}$, masę $m_0 = 500 \text{ kg}$. Z jednej strony posiada dno, a z drugiej strony jest otwarty. Ciśnienie atmosferyczne $p_a = 1013,4 \text{ hPa}$.

- a) Ile powietrza należy wypuścić z naczynia, aby pływało dnem do góry?
b) Na jaką wysokość naczynie będzie wystawało z wody?

W s k a z ó w k a: promień metacentryczny warstwy równoważającej ciężar naczynia jest równy zero. Naczynie będzie więc pływało w pozycji wyprostowanej, jeśli środek wyporu będzie znajdował się ponad środkiem ciężkości naczynia, czyli gdy $h + \frac{1}{2}T < z_G$, gdzie h jest wysokością wystawania dna ponad wodę, zaś T jest różnicą poziomów wody wewnątrz i na zewnątrz. Grubość poduszki $h + T < z_G + \frac{1}{2}T_0$. Kluczową sprawą jest zatem obliczenie środka ciężkości naczynia. Wykonać rysunek.

O d p o w i e d z i: a) $v \in \langle 0,53, 0,93 \rangle \text{ m}^3$, b) $h < 0,57 \text{ m}$.

13. Naczynie posiada dno kwadratowe o boku $a = 1 \text{ m}$, wysokość $H = 1,2 \text{ m}$, masę $m_0 = 200 \text{ kg}$, odległość środka ciężkości od dna $z_G = 0,6 \text{ m}$. Naczynie to włożono do wody dnem do góry.

- Wykazać, że naczynie nie będzie pływało dnem do góry.
- Jak gruba musi być poduszka powietrzna w naczyniu, aby pływało dnem do góry?
- Na jaką wysokość będzie wówczas wystawać dno ponad powierzchnię wody?
- Jakie nadciśnienie będzie panowało w poduszce?

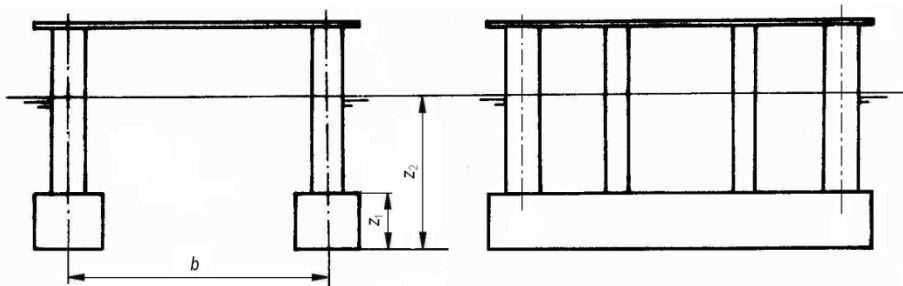
O d p o w i e d z i:

- Środek wyporu znajduje się w odległości $0,88 \text{ m}$ od dna, czyli jest poniżej środka ciężkości, znajdującego się w odległości $0,60 \text{ m}$, co daje początkową wysokość metacentryczną $h_0 = -0,28 \text{ m}$.
- $h + \frac{1}{2}T < z_G$; ponieważ $T = 0,2 \text{ m}$, stąd: $h + T < 0,7 \text{ m}$.
- $h < 0,5 \text{ m}$, d) ciśnienie będzie zwiększone o $\Delta p = 19,6 \text{ hPa}$.

14. Platforma półzanurzeniowa ma następujące dane (rys. 44):

wysokość pływaków $z_1 = 6,7 \text{ m}$, wyporność pływaków $V_1 = 14000 \text{ m}^3$, $z_{M1} = 20,7 \text{ m}$, zanurzenie konstrukcyjne $z_2 = 21,3 \text{ m}$, $V_2 = 19000 \text{ m}^3$, $z_{M2} = 19,0 \text{ m}$, moment bezwładności wodnicy $J_x = 243000 \text{ m}^4$.

Zanurzenie platformy może zmieniać się poprzez przyjmowanie balastu do pływaków.



Rys. 44

Obliczyć:

- największą wartość rzędnej środka ciężkości z_G oraz najmniejszą wysokość metacentryczną h_0 dla zanurzenia konstrukcyjnego z_2 , przy których stateczność jest dodatnia dla dowolnego zanurzenia w przedziale $\langle z_1, z_2 \rangle$,
- pole wodnicy A_{WL} dla $z > z_1$ i rozstaw pływaków.
- Czy zmieni się stateczność platformy, jeśli pionowe kolumny o przekroju kołowym zastąpić kolumnami kwadratowymi o tym samym polu?

O d p o w i e d z i: a) $z_{G \max} = 16,0 \text{ m}$, $h_{0 \min} = 3,0 \text{ m}$, b) $A_{WL} = 343 \text{ m}^2$, $b = 53,2 \text{ m}$,

c) nie zmieni się.

15. Pomost pływający spoczywa na dwóch pływakach prostopadłościennych, których przekroje poprzeczne mają wymiary $0,8 \times 2,2$ m. Zanurzenie wynosi $T = 1,5$ m, zaś rzędna środka ciężkości wynosi $z_G = 2$ m. Jaki musi być rozstaw pływaków b (między osiami), by początkowa wysokość metacentryczna wynosiła $h_0 = 4$ m?

O d p o w i e d ź: $b = 5,6$ m.

16. Znaleźć różniczkowy promień metacentryczny r_C dla stożka o kącie rozwarcia 2α :

a) pływającego wierzchołkiem do góry,

b) pływającego wierzchołkiem do dołu.

Podać interpretację geometryczną w obu wypadkach.

17. Pokazać, że gdy:

a) współczynnik pełnotliwości wręgów $\beta = \text{const}$, to współczynnik $\beta = \kappa$ równa się współczynnikowi pełnotliwości pionowej kadłuba,

b) wręgi aproksymować funkcją potęgową $y = y_0(z/z_0)^n$, gdzie y_0 jest półszerokością wręgu dla zanurzenia $z = z_0$, a wykładnik $n = 1/\kappa - 1$, to moment bezwładności wodnicy jest także funkcją potęgową o równaniu $J = J_0(z/z_0)^p$, gdzie wykładnik $p = 3n$.

R o z w i ą z a n i e b):

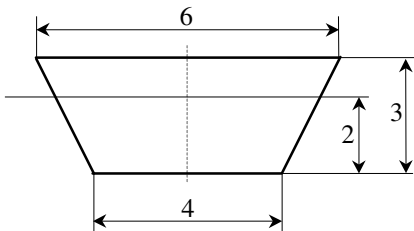
$$J = \int_L \frac{2}{3} y^3 dx = \int_L \frac{2}{3} y_0^3 (z/z_0)^{3n} dx = (z/z_0)^{3n} \int_L \frac{2}{3} y_0^3 dx = J_0 (z/z_0)^{3n},$$

gdzie J_0 jest momentem bezwładności wodnicy dla zanurzenia $z = z_0$.

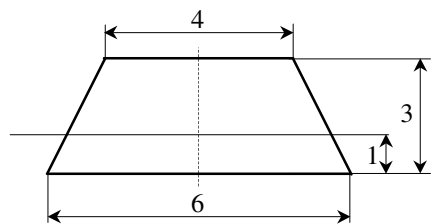
18. Przebieg pola i momentu bezwładności wodnic aproksymowano wzorami potęgowymi: $A = A_0(z/z_0)^q$ i $J = J_0(z/z_0)^p$. Obliczyć różniczkowy promień metacentryczny dla $z = z_0$.

O d p o w i e d ź: $r_C = p\kappa r_0$, czyli jest proporcjonalny do początkowe promienia metacentrycznego r_0 . Podstawiając za $p = 3(1/\kappa - 1)$, otrzymamy: $r_C = 3(1 - \kappa)r_0$.

19. Znaleźć rachunkowo i geometrycznie zakres początkowej stateczności dla pontonu o przekroju trapezowym, jak na: a) rys. 45, b) rys. 46.



Rys. 45



Rys. 46

W s k a z ó w k a: aproksymować krzywą środków pływania w początkowym zakresie stateczności łukiem okręgu o promieniu równym początkowemu różniczkowemu promieniowi metacentrycznemu.

O d p o w i e d z i: a) $\phi_1 = 19,34^\circ$, b) $\phi_1 = 17,67^\circ$.

20. Pokazać, że pochodna pantokareny dana jest wzorem: $dl_k/dV = (l_C - l_k)/V$, gdzie l_C jest ramieniem dodatkowego wyporu, przechodzącego przez środek pływania C . Wzór dotyczy dowolnego punktu referencyjnego.

21. Korzystając z rozwinięcia krzywej ramion (23), pokazać, że:

a)
$$l/\phi = h_0 + c_3\phi^2 + c_5\phi^4 + c_7\phi^6 + \dots,$$

gdzie $c_3, c_5, c_7, \dots$ są współczynnikami rozwinięcia Maclaurina (23),

b) $\lim (l/\phi) = h_0$, gdy $\phi \rightarrow 0$.

Funkcja l/ϕ ułatwia wykreślne znalezienie metacentrum początkowego h_0 i współczynników rozwinięcia c na podstawie znajomości krzywej ramion w początkowym zakresie stateczności. Współczynniki wielomianu l/ϕ są współczynnikami rozwinięcia Maclaurina.

22. Pokazać, że ramię prostujące można wyrazić za pomocą wzorów:

a)
$$l = \int_0^\phi r(\theta) \sin(\phi - \theta) d\theta - a \sin \phi,$$

b)
$$l = h_0 \sin \phi + \int \sin(\phi - \varphi) dr,$$

gdzie całkowanie odbywa się względem promienia metacentrycznego od r_0 do $r(\phi)$.

W s k a z ó w k a: we wzorze a) zastosować całkowanie przez części.

23. Znaleźć wysokość metacentryczną statku pływającego z przechylem, wywołanym ujemną początkową wysokością metacentryczną h_0 .

R o z w i ą z a n i e: korzystamy ze wzoru (26) na krzywą ramion w początkowym zakresie stateczności. Wysokość metacentryczna $h = l'$ jest pochodną ramienia prostującego l . Różniczkując (26), otrzymamy:

$$h = r_0 \tan \phi \sin \phi / \cos^2 \phi + (h_0 + \frac{1}{2} r_0 \tan^2 \phi) \sin \phi.$$

Podstawiając $\phi = \phi_0$, które zeruje wyrażenie w nawiasie, oraz uwzględniając wzór (27), otrzymamy: $h = r_0 \tan^2 \phi_0 / \cos \phi_0 = -2h_0(1 - 2h_0/r_0)^{1/2} = -2h_0(1 - h_0/r_0)$. Ponieważ $h_0/r_0 \approx 0$ jest wielkością znikomo małą, stąd ostatecznie $h \approx -2h_0$.

24. Jednorodna belka o przekroju kwadratowym i gęstości ρ_c , pływa w wodzie o gęstości ρ . Kiedy może pływać w pozycji:

- Wyprostowanej, gdy dwa wierzchołki są nad, a dwa pod powierzchnią wody?
- Przechylonej, gdy dwa wierzchołki są nad, a dwa pod powierzchnią wody?
- Przechylonej, gdy jeden wierzchołek jest nad lub pod powierzchnią wody?
- Wyprostowanej, gdy jeden wierzchołek jest nad lub pod powierzchnią wody?

O d p o w i e d z i:

- $|\frac{1}{2} - \rho_c/\rho| > 1/\sqrt{12}$,
- $\frac{1}{4} < |\frac{1}{2} - \rho_c/\rho| < 1/\sqrt{12}$,
- $\frac{7}{32} < |\frac{1}{2} - \rho_c/\rho| < \frac{1}{4}$,
- $|\frac{1}{2} - \rho_c/\rho| < \frac{7}{32}$.

25. Na pokład statku załadowano drewno w takiej ilości, że nowy środek ciężkości przesunął się 8 cm powyżej nowego metacentrum M_0 . Jaki będzie kąt przechyłu wywołany ujemną początkową wysokością metacentryczną? Dane statku: wyporność $V = 5600 \text{ m}^3$, poprzeczny moment bezwładności wodnicy $J_x = 15200 \text{ m}^4$, gęstość wody $\rho = 1,025 \text{ g/cm}^3$. Jaka będzie wysokość metacentryczna w położeniu równowagi?

O d p o w i e d z: $\phi_0 = 13,65^\circ$, $h = 0,165 \text{ m}$.

26. Wyznaczyć kąt przechyłu statku wywołany pracą śruby. Dane: $h_0 = 0$, moc silnika $N = 3400 \text{ kW}$, prędkość obrotowa śruby $n = 120 \text{ obr/min}$, pozostałe dane, jak w zadaniu 25.

R o z w i ą z a n i e: prędkość kątowna śruby $\omega = 2 \text{ obr/s} = 4\pi \text{ rad/s}$. Moment obrotowy śruby Q jest dla statku momentem przechylającym:

$$Q = N/\omega = 3400 \cdot 10^3 / 4\pi \text{ Ws} = 34/4\pi \cdot 10^5 \text{ Nm},$$

$$l_p = \frac{Q}{D} = \frac{34 \cdot 10^5 \text{ Nm} \cdot \text{m}^3 \text{s}^2}{4\pi \cdot 5600 \text{ m}^3 \cdot 1025 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}} = \frac{34}{4\pi \cdot 56 \cdot 1,025 \cdot 9,81} \text{ m} = 0,004805 \text{ m}.$$

Kąt przechyłu określa równanie $l = l_p$. Uwzględniając wzór (26), otrzymamy:

$$\frac{1}{2} r_0 \text{tg}^2 \phi \sin \phi = l_p.$$

Uwzględniając, że kąt ϕ jest mały, funkcje sinus i tangens możemy zastąpić kątem w radianach. Stąd: $\phi^3 = 2l_p/r_0 = 0,003540$, co daje kąt $\phi = 8,73^\circ$. Gdyby wysokość metacentryczna równała się $h_0 = 0,25 \text{ m}$, kąt przechyłu zmalałby do $\phi = 1,10^\circ$, niezauważalnego dla załogi. Wzór metacentryczny $\phi = l_p/h_0$ dałby tę samą wartość kąta.

27. Przed podniesieniem z ładowni ładunku o masie 50 ton statek miał $h_0 = 0$. Obliczyć przechył statku, jeśli ładunek zawisł na linie o długości $e = 10 \text{ m}$. Dane statku, jak w zadaniu 25.

O d p o w i e d ź: $\phi = 14,70^\circ$.

28. Obliczyć kąt przechyłu statku wywołany przejściem 4 członków załogi na burtę zawietrzną. W wyniku działania wiatru jest już wstępny przechył $\phi_0 = 2^\circ$. Dane: $h_0 = 0$, średni ciężar jednego członka załogi 75 kg, szerokość statku $B = 14,5 \text{ m}$, gęstość wody $\rho = 1,02 \text{ g/cm}^3$, pozostałe dane, jak w zadaniu 25.

R o z w i ą z a n i e: Kąt przechyłu określa równanie $l = l_p$, gdzie ramię prostujące dane jest wzorem (26). Ramię przechylające $l_p = l_{p_0} + py/D$. Stąd:

$$\frac{1}{2} r_0 \phi_0^3 + my/M = \frac{1}{2} r_0 \phi^3,$$

gdzie kąty są w radianach, $m = 4 \cdot 75 \text{ kg} = 300 \text{ kg}$ jest przemieszczoną masą, $y = \frac{1}{2}B$ jest przemieszczeniem masy, zaś M jest masą statku. Dzieląc równanie przez $\frac{1}{2}r_0$, otrzymamy: $\phi^3 = \phi_0^3 + 2my/Mr_0$. Wprowadzając kąty w stopniach, otrzymamy:

$$\left(\frac{\pi}{180} \phi\right)^3 = \left(\frac{\pi}{180} \phi_0\right)^3 + \frac{2my}{Mr_0},$$

równoważne równaniu:

$$\phi^3 = \phi_0^3 + \frac{2my}{Mr_0} \left(\frac{180}{\pi}\right)^3 = 8 + 52,77 = 60,77,$$

co daje przechył statku $\phi = 3,93^\circ$. Wzoru metacentrycznego nie można w tym wypadku zastosować, gdyż wymaga, by h_0 było dodatnie.

29. Jacht żaglowy płynie z przechylem $\phi_0 = 1,5^\circ$. Obliczyć przechył, jeśli jeden z członków załogi wejdzie:

- na maszt na wysokość $e = 7 \text{ m}$ nad pokład,
- na koniec bomu o długości $e = 3 \text{ m}$, ustawionego w poprzek jachtu i nachylonego pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do pokładu,
- na koniec bomu o długości $e = 3 \text{ m}$, ustawionego w poprzek jachtu równolegle do powierzchni wody.

D a n e: masa jachtu $M = 6 \text{ ton}$, początkowa wysokość metacentryczna $h_0 = 0,20 \text{ m}$, masa człowieka $m = 75 \text{ kg}$.

O d p o w i e d z i: a) $\phi = 2\frac{2}{3}^\circ$, b) $\phi = \phi_0 + (me/Mh_0)\cos(\alpha - \phi)$, co daje $\phi = 11,7^\circ$,

c) $\phi = \phi_0 + (me/Mh_0)$, co daje $\phi = 12,24^\circ$.

30. Pokazać, że w wyniku zmiany wyporności krzywa ramion prostujących zmieni się o $\Delta l = \Delta V_V(l_C - l)$, gdzie l_C jest ramieniem dodatkowej siły wyporu względem środka ciężkości statku G .
31. Pokazać, że w drugim przedziale kątów przechyłu $\phi \in \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$, promienie metacentryczne pontonu prostopadłościennego są funkcją monotonicznie malejącą.
O d p o w i e d ź: widać to wyrażnie, jeśli przedstawić je w postaci:

$$r = \frac{r_0}{\cos^3 \phi} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{tg} \phi} \right)^{1,5} = r_1 \left(\frac{\sin 2\phi_1}{\sin 2\phi} \right)^{1,5},$$

gdzie r_1 jest promieniem metacentrycznym dla kąta $\phi = \phi_1$.

32. Pokazać, że dla pontonu o przekroju trójkątnym:
a) początkowy zakres stateczności określa równanie:

$$\frac{\cos(\alpha - \phi_1)}{\cos(\alpha + \phi_1)} = \left(\frac{H}{T} \right)^2,$$

gdzie α jest kątem nachylenia burt względem PS, H jest wysokością boczną, zaś T jest zanurzeniem, którego rozwiązaniem jest:

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \operatorname{ctg} \alpha,$$

gdzie $k \equiv H/T$ jest stosunkiem wysokości bocznej do zanurzenia.

- b) kąt, przy którym wynurza się wierzchołek, określa wzór:

$$\operatorname{tg} \phi_2 = \frac{k^2}{k^2 - 2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Kąt $\phi_2 < 90^\circ$, jeśli $(H/T)^2 > 2$. Łatwo pokazać, że w takim wypadku kąt $\phi_2 > \phi_1$.

- c) początkowy promień metacentryczny dany jest wzorem: $r_0 = \frac{2}{3} T \operatorname{tg}^2 \alpha$,
d) promień metacentryczny dla $\phi = \phi_1$, dany jest wzorem:

$$r_1 = r_0 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{\cos(\alpha - \phi_1) \cos(\alpha + \phi_1)} \right]^{1,5},$$

- e) promień metacentryczny dla $\phi \leq \phi_1$, dany jest wzorem:

$$r = r_1 \left[\frac{\cos(\alpha - \phi_1) \cos(\alpha + \phi_1)}{\cos(\alpha - \phi) \cos(\alpha + \phi)} \right]^{1,5},$$

- f) promień metacentryczny dla $\phi \geq \phi_1$, dany jest wzorem:

$$r = r_1 \left[\frac{\cos(\alpha - \phi_1) \sin \phi_1}{\cos(\alpha - \phi) \sin \phi} \right]^{1,5}.$$

33. Dana jest krzywa ramion kształtu l_k (liczonych względem punktu K):

ϕ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
l_k [m]	1,70	3,34	4,89	6,26	7,29	8,06	8,45	8,38	7,36

Obliczyć współrzędne środka wyporu dla kąta przechyłu $\phi = 40^\circ$; $z_F = 3,70$ m.

R o z w i ą z a n i e : Od współrzędnych środka wyporu zależy ramię prostujące l , dane wzorem (19) oraz ramię dynamiczne $l_d = HF - a$, gdzie odcinek HF dany jest wzorem (21). Podstawiając $z_G = 0$, otrzymamy zależności dotyczące ramion kształtu:

$$\begin{aligned} l_k &= y \cos \phi + z \sin \phi, \\ l_{kd} &= y \sin \phi - z \cos \phi + z_F, \end{aligned}$$

gdzie l_{kd} jest krzywą całkową ramienia kształtu. Dla $\phi = 40^\circ$, $l_k = 6,26$ m, zaś $l_{kd} = 2,285$ m (obliczone numerycznie). Mamy więc liniowy układ dwóch równań na y i z :

$$\begin{aligned} y \cos \phi + z \sin \phi &= l_k, \\ y \sin \phi - z \cos \phi &= l_{kd} - z_F, \end{aligned}$$

który można łatwo rozwikłać, jeśli zauważyć że dotyczy on transformacji współrzędnych wektora, wywołanych obrotem układu współrzędnych:

$$\begin{aligned} y &= l_k \cos \phi + (l_{kd} - z_F) \sin \phi, \\ z &= l_k \sin \phi - (l_{kd} - z_F) \cos \phi. \end{aligned}$$

Podstawiając $\phi = 40^\circ$, $l_k = 6,26$ m, $l_{kd} = 2,285$ m, otrzymamy: $y = 3,89$ m, $z = 5,11$ m.

34. Wykorzystując metodę Kryłowa-Dargniesia obliczyć brakujące dane:

ϕ	y [m]	z [m]	r [m]
30°	1,962	4,927	5,205
45°			
60°	3,546	6,444	

O d p o w i e d ź : $y_{45^\circ} = 2,83$ m, $z_{45^\circ} = 5,711$ m, $r_{45^\circ} = 4,655$ m, $r_{60^\circ} = 2,431$ m.

35. Znaleźć najgorsze wypełnienie zbiornika v o stałym przekroju trójkątnym w kształcie klina dla przechyłów na stronę:

- naroża,
- środnika (rys. 47).

O d p o w i e d ź do a): $v = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} \approx 44\%$.

R o z w i ą z a n i e b): Zauważmy, że objętość zajęta przez ciecz w położeniu wyprostowanym i przestrzeń nad swobodną powierzchnią po przechylenie są geometrycznie podobne do zbiornika. Oznaczając skalę podobieństwa tych trójkątów przez α i β oraz pamiętając, że swobodna powierzchnia w położeniu wyprostowanym jest prostokątem, warunek na najgorsze wypełnienie zbiornika daje równanie: $\frac{1}{2}\alpha\beta = b - \beta b$. Stąd: $\frac{1}{2}\alpha = 1 - \beta$.

Związek między obydwooma skalami wynika z zachowania objętości cieczy:

$$\alpha^2 A = A - \beta^2 A, \quad \alpha^2 = 1 - \beta^2.$$

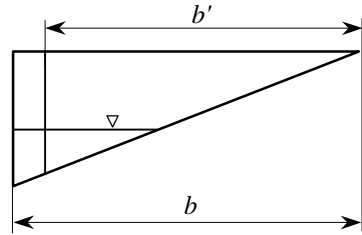
Tak więc: $\frac{1}{2}\alpha = 1 - (1 - \alpha^2)^{1/2}$, którego pierwiastkiem jest $\alpha = 0,8$. Stąd wypełnienie zbiornika $v = \alpha^2 = 0,64 = 64\%$.

36. Znaleźć najgorsze wypełnienie zbiornika v w kształcie ostrosłupa trójkątnego, którego podstawą jest trójkąt, jak na rys. 47, którego ściana boczna jest pionowa, a sufit poziomy, dla przechyłów na stronę:

a) naroża, b) środka.

Odpowiedź do a): $v = (3/4)^3 = 27/64 \approx 42,2\%$.

Rozwiązanie b): Zauważmy, że objętość zajęta przez ciecz w położeniu wyprostowanym i przestrzeń nad swobodną powierzchnią po przechyle są geometrycznie podobne do zbiornika. Oznaczając skale podobieństwa tych ostrosłupów przez α i β oraz pamiętając, że swobodna powierzchnia w położeniu wyprostowanym jest trójkątem, warunek na najgorsze wypełnienie zbiornika daje równanie:



Rys. 47

$$\frac{1}{3}\alpha b = b - \beta b, \quad \frac{1}{3}\alpha = 1 - \beta.$$

Związek między obydwojema skalami wynika z zachowania objętości cieczy:

$$\alpha^3 V = V - \beta^3 V, \quad \alpha^3 = 1 - \beta^3.$$

Tak więc: $\frac{1}{3}\alpha = 1 - (1 - \alpha^3)^{1/3}$, którego pierwiastkiem jest $\alpha \approx 0,8605$. Stąd wypełnienie zbiornika $v = \alpha^3 \approx 0,637 = 63,7\%$, czyli niemal tyle, co w zadaniu 35 b).

37. Znaleźć oś, wokół której obróci się statek, jeśli przyjmiemy ciężar na dziobie. Wodnica jest prostokątna. Wskazówka: skorzystać z teorii klina.

Odpowiedź: $e = L/6$ od owręża w stronę rufy lub $1/3 L$ od rufowego końca statku.

38. Gdzie umieścić zbiornik rozchodowy paliwa, by w trakcie zużywania paliwa nie zmieniło się zanurzenie:

- na rufie statku, którego rufowa część wodnicy jest prostokątna, a dziobowa – trójkątna
- na dziobie statku, jak wyżej
- na rufie statku o następujących danych: $L_{pp} = 86$ m, $V = 5600$ m³, $x_c = -1,2$ m, $A_{WL} = 950$ m², $J_L = 547200$ m⁴.

Odpowiedzi: a) $1/28 L$ od owręża w stronę dziobu, b) $9/44 L$ od owręża w stronę rufy, c) 12,57 m od owręża w stronę dziobu.

39. Na statek przyjęto ciężar p w PS w odległości x_p od środka pływania. Pokazać, że:

- przegłębienie statku $\theta = px_p/DH_0$, gdzie $DH_0 \approx DR_0 = \gamma J_L$ jest sztywnością statku przed przyjęciem ciężaru,
- zanurzenie statku nie zmieni się w odległości $e = -DH_0/\gamma A_{WL} x_p \approx -J_L/x_p A_{WL}$ od środka pływania.

40. Pokazać, że gdy dokujemy statek z przegłębieniem $\theta = t/L_{pp}$ na rufę, to na pierwszym kilbloku rufowym wystąpi maksymalna reakcja określona wzorem: $p = DH_0 \theta/x_p \approx \gamma J_L \theta/x_p$, gdzie x_p jest odległością kilbloku od środka pływania.

41. Pokazać, że dla statku o burtach pionowych zachodzą wzory:

- $d_{d\phi} J_2 = 3J_2 \operatorname{tg} \phi$,
- $d_{d^2\phi}^2 J_2 = 3J_2(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \phi)$,
- $d_{d^3\phi}^3 J_2 = 3J_2 \operatorname{tg} \phi(11 + 20 \operatorname{tg}^2 \phi)$,
- $d_{d^4\phi}^4 J_2 = 3J_2(11 + 104 \operatorname{tg}^2 \phi + 120 \operatorname{tg}^4 \phi)$,

gdzie $J_2 = J_B/\cos^3 \phi$ jest momentem bezwładności wodnicy.

42. Pokazać, że w początkowym zakresie przechyłów pontonu o burtach rozchylonych, jak na rys. 23, promień metacentryczny, współrzędne środka wyporu i ramię prostujące wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & r = r_0 \cos^3 \alpha / (\cos^2 \alpha - \sin^2 \phi)^{3/2}, \\ \text{b)} \quad & y = r_0 \cos \alpha \sin \phi / (\cos^2 \alpha - \sin^2 \phi)^{1/2}, \\ & z = z_0 + r_0 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos \alpha [\cos \phi / (\cos^2 \alpha - \sin^2 \phi)^{1/2} - 1 / \cos \alpha], \\ \text{c)} \quad & l = \{h_0 + r_0 [\cos \alpha \cos \phi / (\cos^2 \alpha - \sin^2 \phi)^{1/2} - 1]\} \sin \phi, \end{aligned}$$

gdzie $r_0 = B^3/12A_\otimes$ jest początkowym promieniem metacentrycznym. Pokazać, że gdy $\alpha \rightarrow 0$, to wyrażenie w nawiasie kwadratowym dąży do $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \phi$.

43. Znaleźć maksymalny przechył okrętu ϕ_1 , wywołany uderzeniem szkwału dla dwóch przypadków, gdy uderzenie szkwału jest przeciwne do wychylenia i zgodne z wychyleniem. Moment przechylający szkwału wynosi $M_p = 1050 \text{ Tm}$, wyporność okrętu $D = 9000 \text{ T}$, amplituda kołysań $\phi_a = 10^\circ$ względem PS. Ramiona prostujące aproksymowane są za pomocą linii łamanej: w przedziale od 0° do 40° ramię l zmienia się od 0 do 0,5 m, a od 40° do 80° zmienia się od 0,5 m do 0.

O d p o w i e d z i: $\phi_1 = 28^\circ$, $l_{pkr} = 0,25 \text{ m}$, współczynnik bezpieczeństwa $K = 2,14$. Uderzenie zgodne z przechylem nie powiększy przechyłu.

44. Wersor normalny do powierzchni kadłuba statku cylindrycznego określony jest wzorem: $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, gdzie α jest kątem nachylenia normalnej względem osi y (oś z skierowana jest w dół). W kierunku poziomym wymiary wręgu zmieniamy w skali λ . Znaleźć wersor normalny wręgu powinowatego $\mathbf{n}_p$.

R o z w i ą z a n i e: Kąt nachylenia normalnej dany jest wzorem $\operatorname{tg} \alpha = -dy/dz$. Dla wręgu powinowatego dy wzrasta λ razy, stąd: $\operatorname{tg} \alpha_p = \lambda \operatorname{tg} \alpha$, co daje $\alpha_p = \operatorname{arctg}(\lambda \operatorname{tg} \alpha)$.

Zatem:

$$\begin{aligned} n_{2p} &\equiv \cos \alpha_p = \cos \operatorname{arctg}(\lambda \operatorname{tg} \alpha) = 1/[\lambda^2/n_2^2 + (\lambda^2 - 1)]^{1/2}, \\ n_{3p} &\equiv \sin \alpha_p = \sin \operatorname{arctg}(\lambda \operatorname{tg} \alpha) = \lambda/[1/n_3^2 + (\lambda^2 - 1)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Wyrażenia po prawej stronie wynikają z rozpisania kosinusa i sinusa arkusa tangensa. Gdy skala $\lambda = 1 + p$ jest bliska 1, wówczas:

$$\begin{aligned} n_{2p} &\approx n_2/(\lambda - p n_2^2/\lambda), \\ n_{3p} &\approx \lambda n_3/(1 + p n_3). \end{aligned}$$

45. Określić maksymalny błąd pomiaru kąta przechyłu za pomocą pionu.

R o z w i ą z a n i e: kąt przechyłu dany jest wzorem $\phi = a/l$, gdzie a jest wychyleniem pionu, zaś l jest długością pionu. Logarytmując ten wzór, otrzymamy: $\ln \phi = \ln a - \ln l$. Obliczając stronami różniczkę, otrzymamy: $d\phi/\phi = da/a - dl/l$. Mnożąc stronami przez kąt ϕ , otrzymamy: $d\phi = da/l - \phi(dl/l)$. Drugi wyraz jest małą wyższego rzędu, możemy więc go pominąć. Znak "d" oznacza różniczkę, czyli nieskończenie mały przyrost. Skończony przyrost nazywa się różnicą Δ . Otrzymany wzór jest ważny także dla skończonych różnic. Zatem $\Delta\phi = \Delta a/l$.

Z otrzymanego wzoru wynika ciekawy wniosek, że błąd pomiaru małego kąta nie zależy od kąta, czyli jest taki sam, niezależnie od kąta wychylenia pionu.

Przykładowo, jeśli błąd odczytu wychylenia pionu $\Delta a = 0,5 \text{ mm}$, a długość pionu wynosi $l = 5 \text{ m}$, to błąd pomiaru kąta $\Delta\phi = 0,5/5000 = (1/10000) \text{ rad} = 0,0057^\circ$.

Literatura

1. Dudziak J. *Teoria okrętu*, Gdańsk, Wydawnictwo Morskie 1988.
2. Frąckowiak M., Pawłowski M. *Ćwiczenia z hydromechaniki okrętu*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1978.
3. Krężelewski M. *Hydromechanika ogólna i okrętowa*, część I, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1977.
4. Kabaciński J. *Stateczność i niezatapialność statku*, Wyższa Szkoła Morska, Szczecin 1992.
5. International Maritime Organisation, *Intact stability criteria for passenger and cargo ships*, IMO, London 1987, 22 s.
6. Polski Rejestr Statków, *Przepisy klasyfikacji i budowy statków morskich*, część IV *Stateczność i niezatapialność*, Gdańsk, styczeń 2022.
7. Polski Rejestr Statków, *Stateczność*, nr 6/P, 2006, www.prs.pl/uploads/p6p_pl.pdf.



MACIEJ PAWŁOWSKI

Doktor habilitowany. Absolwent wydziału okrętowego Politechniki Gdańskiej (1970). W latach 1970-2010 zatrudniony na Politechnice Gdańskiej, jako nauczyciel akademicki. Wykładał hydromechanikę ogólną i okrętową, statykę okrętu, mechanikę techniczną, wytrzymałość materiałów, matematykę stosowaną. Wypromował 11 doktorów. W pracy badawczej koncentrował się na bezpieczeństwie statku po kolizji, gdzie zyskał międzynarodowe uznanie. Odbił staże zagraniczne (w sumie 7 lat) na uniwersytetach w Newcastle upon Tyne, Glasgow, Strathclyde i Lyngby, związane z tą tematyką. W latach 1983-1998 aktywnie uczestniczył w obradach Podkomitetu IMO ds. SLF (stateczności, linii ładunkowych i bezpieczeństwa statków rybackich). Współtwórca przepisów niezatapialności w konwencji SOLAS. W 1995 roku, podczas pobytu w Glasgow, odkrył mechanizm przewracania się na fali statków ro-ro po utracie integralności burty, co dało podstawy metodzie statycznej równoważności SEM (static equivalent method), umożliwiającej przewidywanie przewracania się promu na fali z dokładnością nie gorszą, niż badania modelowe czy symulacje numeryczne. Współpracował z Centrum Techniki Okrętowej oraz Polskim Rejestrem Statków. Publikował w wielu renomowanych czasopismach, jak Transactions SNAME, Journal of Ship Research, Marine Technology and SNAME News, The Naval Architects, i innych. Autor książki *Subdivision and damage stability of ships* (2004) nt. niezatapialności okrętu w ujęciu probabilistycznym, pierwszej na świecie, współtwórca tej dziedziny wiedzy. Od 2012 roku profesor na Wydziale Nauk Inżynierskich Gdańskiej Szkoły Wyższej

Nakładem Wydawnictwa GSW ukazały się:

- ➔ *Podstawy mechaniki*, Gdańsk 2016, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-89762-83-2 ➔ <https://tiny.pl/r4jhn>
- ➔ *Podstawy mechaniki. Uzupełnienia*, wyd. online (PDF), Gdańsk 2019, ISBN 978-83-66270-00-8 ➔ <https://tiny.pl/t44dt>
- ➔ *Analiza stanu naprężeń. Skrypt dla studentów*, wyd. online (PDF), Gdańsk 2018, ISBN 978-83-89762-51-1 ➔ <https://tiny.pl/r4jq7>
- ➔ *Wytrzymałość zmęczeniowa. Skrypt*, wyd. online (PDF), Gdańsk 2021, ISBN 978-83-66270-19-0 ➔ <https://tiny.pl/whjvs>
- ➔ *Całkowanie numeryczne*, wyd. II online (PDF), Gdańsk 2022, ISBN 978-83-66270-23-7 ➔ https://bit.ly/wydawnictwo_123



9 788366 270312

ISBN 978-83-66270-31-2
Wydawnictwo GSW · 2023
www.gsw.gda.pl/wydawnictwo
Nr katalogowy: [131]



WYDANIE
ONLINE PDF