Maciej Pawłowski

Wytrzymałość zmęczeniowa

SKRYPT

GSW
Gdańsk 2021

dr hab. inż. Maciej Pawłowski, prof. GSW
Wydział Nauk Inżynierskich, Gdańska Szkoła Wyższa

Dostępne publicznie pod adresem:
https://gsw.gda.pl/wydawnictwo/wytrzymalosc-zmeczeniowa-2021

Redakcja Tomasz Mikołajczewski

Wydanie pierwsze, online (PDF), Gdańsk 2021

GSW
GDAŃSKA SZKOŁA WYŻSZA

Wydawnictwo GSW
Gdańska Szkoła Wyższa
80-875 Gdańsk, ul. Biskupia 24B
tel. 58 305 08 11, tel. 58 305 08 12
Zamówienia: wydawnictwo@gsw.gda.pl

www.gsw.gda.pl/wydawnictwo

ISBN online 978-83-66270-19-0 Nr katalogowy [119]

SPIS TREŚCI

STRESZCZENIE

W skrypcie omówiono wytrzymałość zmęczeniową stali w ujęciu *makroskopowym*, tj. w oparciu o krzywe Wöhlera, z ominięciem teorii propagacji pęknięć zmęczeniowych. Omówiono współczynnik asymetrii oscylacji naprężeń R oraz trzy sposoby przedstawiania wyników badań, dotyczących nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej. Podano analityczne związki, dotyczące współczynnika R, nieznane w literaturze oraz wyprowadzono wzór na liczbę oscylacji N do zniszczenia próbki, uwzględniający naprężenia średnie, także nieznany w literaturze. Omówiono obliczanie stopnia zużycia zmęczeniowego D w oparciu o hipotezę Palmgrena-Minera, sprowadzającej się do sumy dwóch niezupełnych funkcji gamma. Pokazano, że krzywe Wöhlera dla oscylacji zmiennoamplitudowych, typowych w okrętownictwie, są inne niż w przypadku oscylacji o stałej amplitudzie, typowych w budowie maszyn.

§ 1. Oznaczenia i określenia stosowane w skrypcie

HSE – Health & Safety Executive – brytyjska instytucja zajmująca się między innymi bezpieczeństwem konstrukcji stalowych

Fala regularna – dwuwymiarowa fala o zadanej amplitudzie i okresie

Funkcja przenoszenia (amplitudy) – stosunek amplitudy odpowiedzi na fali regularnej (np. naprężeń w wybranym punkcie konstrukcji) do amplitudy fali

IIW – International Institute of Welding – międzynarodowa instytucja zajmująca się problematyką spawania

MPa – *megapaskal*, tożsamy z N/mm^2

Prognoza krótkoterminowa – rozkład parametru odpowiedzi kadłuba (np. naprężeń w konstrukcji) na zadanym stanie morza

Prognoza długoterminowa – rozkład parametru odpowiedzi kadłuba (np. naprężeń w konstrukcji) dla zakładanego okresu eksploatacji statku. Otrzymuje się go z uśredniania prognoz krótkoterminowych względem częstości występowania stanów morza

Stan morza – falowanie nieregularne o zadanej znaczącej wysokości i okresie charakterystycznym fali

Stopień zużycia zmęczeniowego – bezwymiarowy współczynnik stosowany w hipotezie Palmgrena-Minera do oceny zużycia zmęczeniowego

Trwałość zmęczeniowa – zdolność konstrukcji do przenoszenia obciążeń dynamicznych, mierzona liczbą lat eksploatacji, po której spodziewane są pęknięcia zmęczeniowe

Wykres Wöhlera – wykres zależności pomiędzy wartością naprężeń niszczących próbkę i liczbą cykli zmian obciążenia próbki

Wytrzymałość zmęczeniowa – maksymalna amplituda oscylacji naprężeń $(\sigma_a)_{dop}$, oznaczana przez Z, z którą oscylacje mogą trwać nieskończenie długo wokół naprężeń średnich σ_m, bez zniszczenia próbki

Związek dyspersyjny – zależność między okresem T i długością fali λ. Dla wody głębokiej zależność ta wynosi $gT^2 = 2\pi\lambda$

- g – przyspieszenie ziemskie, równe 9,81 m/s^2
- H_s – znacząca wysokoś fali
- N – liczbą oscylacji do zniszczenia próbki
- N_0 – liczba oscylacji na końcu krzywej Wöhlera, tj. na styku z asymptotą poziomą
- R_e – granica plastyczności
- R_m – granica wytrzymałości doraźniej
- R – współczynnik asymetrii oscylacji naprężeń, równy ilorazowi naprężeń minimalnych do maksymalnych $\sigma_{min}/\sigma_{max}$
- Z – granica wytrzymałości zmęczeniowej
- σ_a – amplituda oscylacji naprężeń
- σ_m – średni poziom, wokół którego odbywają się oscylacje naprężeń, równy naprężeniom, jakie występują w elemencie konstrukcyjnym na wodzie spokojnej

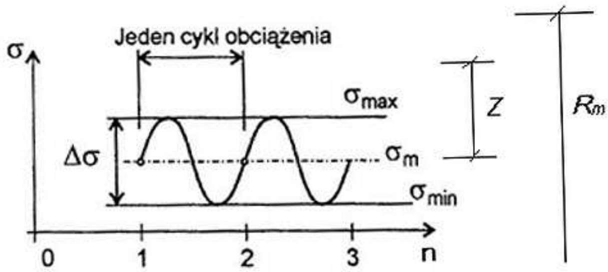
$\Delta\sigma$ – zakres (zmian) naprężeń, równy $2\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{min}$
$\Delta\sigma_0$ – zakres naprężeń w punkcie załamania krzywej Wöhlera
ω – częstość naprężeń [rad/s]

§ 2. Podstawowe pojęcia

Z wytrzymałością zmęczeniową mamy do czynienia, gdy obciążenie elementu jest okresowo zmienne. Przyjmuje się, że ta zmienność jest harmoniczna (sinusoidalna), o stałej amplitudzie, dana wzorem:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t, \tag{1}$$

gdzie σ_m jest średnim poziomem naprężeń, wokół którego odbywają się oscylacje z amplitudą $\sigma_a = ½\Delta\sigma$ (rys. 1). Wytrzymałość zmęczeniowa nie zależy od częstości oscylacji ω, lecz od liczby oscylacji N, jeśli częstotliwość $f \equiv \omega/2\pi \in \langle 300, 6000\rangle$ Hz. Jak widzimy, oscylacje opisują dwa parametry pozycyjne σ_m i σ_a. Różnicę między σ_{max} i σ_{min}, oznaczaną przez $\Delta\sigma = 2\sigma_a$, równą podwojonej amplitudzie, nazywa się *zakresem (zmian) naprężeń*. Oscylacje wprowadzają nowy aspekt wytrzymałości w stosunku do obciążenia stałego, zwany wytrzymałością zmęczeniową.



Rys. 1. Obciążenie cyklicznie zmienne (niesymetryczne)

Przez wytrzymałość zmęczeniową rozumie się maksymalną amplitudę oscylacji naprężeń $(\sigma_a)_{dop}$, oznaczaną przez Z, z którą oscylacje mogą trwać nieskończenie długo wokół naprężeń średnich σ_m bez zniszczenia próbki. Gdy $\sigma_a > Z$, próbka ulegnie zniszczeniu po skończonej liczbie oscylacji N, mimo że naprężenia σ_{max} są mniejsze od *wytrzymałości doraźnej* R_m. Amplituda $Z \equiv (\sigma_a)_{dop}$ nazywa się *granicą wytrzymałości zmęczeniowej*.

Wytrzymałość zmęczeniowa zależy od gatunku stali i poziomu σ_m, wokół którego odbywają się oscylacje. Z spada monotonicznie ze wzrostem σ_m. Największe jest, gdy $\sigma_m = 0$, czyli dla oscylacji naprzemiennych, a najmniejsze, równe 0, gdy $\sigma_m = R_m$.

W budowie maszyn rozpatruje się głównie dwa przypadki oscylacji obciążeń:

- naprzemienne (symetryczne, obustronnie zmiennie), dla których $\sigma \in \langle -\sigma_a, \sigma_a\rangle$;
- pulsujące, jednostronnie zmienne, dla których $\sigma \in \langle 0, 2\sigma_a\rangle$, gdzie σ_a jest amplitudą oscylacji.

W pierwszym przypadku $\sigma_{max} = \sigma_a$, czyli σ_{max} jest tożsame z amplitudą σ_a, $\sigma_m = 0$, w drugim — $\sigma_{max} = 2\sigma_a \equiv \Delta\sigma$ jest tożsame z zakresem zmian naprężeń, zaś $\sigma_m = \sigma_a$.

Konstrukcje okrętowe należałoby badać na dowolny przypadek obciążenia niesymetrycznego, jak ten na rys. 1, opisany przez naprężenia średnie σ_m i amplitudę naprężeń σ_a. Obciążenia niesymetryczne charakteryzuje się *współczynnikiem asymetrii R*, równym ilorazowi naprężeń minimalnych do maksymalnych:

$$R = \sigma_{min}/\sigma_{max}, \tag{2}$$

przy czym:

$R = -1$, dla oscylacji obustronnie zmiennych, bo $\sigma_{min} = -\sigma_a$, a $\sigma_{max} = \sigma_a$,
$R = 0$, dla oscylacji pulsujących, bo $\sigma_{min} = 0$, $\sigma_{max} = 2\sigma_a$,
$R = 1$, dla obciążenia stałego, bo $\sigma_{min} = \sigma_{max}$.

Współczynnik asymetrii $R \in \langle -1, 1 \rangle$, gdy naprężenia średnie $\sigma_m > 0$. Współczynnik ten można powiązać z innymi charakterystykami oscylacji. Przykładowo:

$$\sigma_m = ½(\sigma_{max} + \sigma_{min}) = \sigma_{max}½(1 + R).$$

Stąd:

$$\sigma_m/\sigma_{max} = ½(1 + R). \tag{3}$$

Podstawiając za $\sigma_m = \sigma_{max} - \sigma_a$, otrzymamy:

$$\sigma_a/\sigma_{max} = ½(1 - R). \tag{4}$$

Mnożąc stronami przez 2, otrzymamy:

$$\Delta\sigma/\sigma_{max} = 1 - R. \tag{5}$$

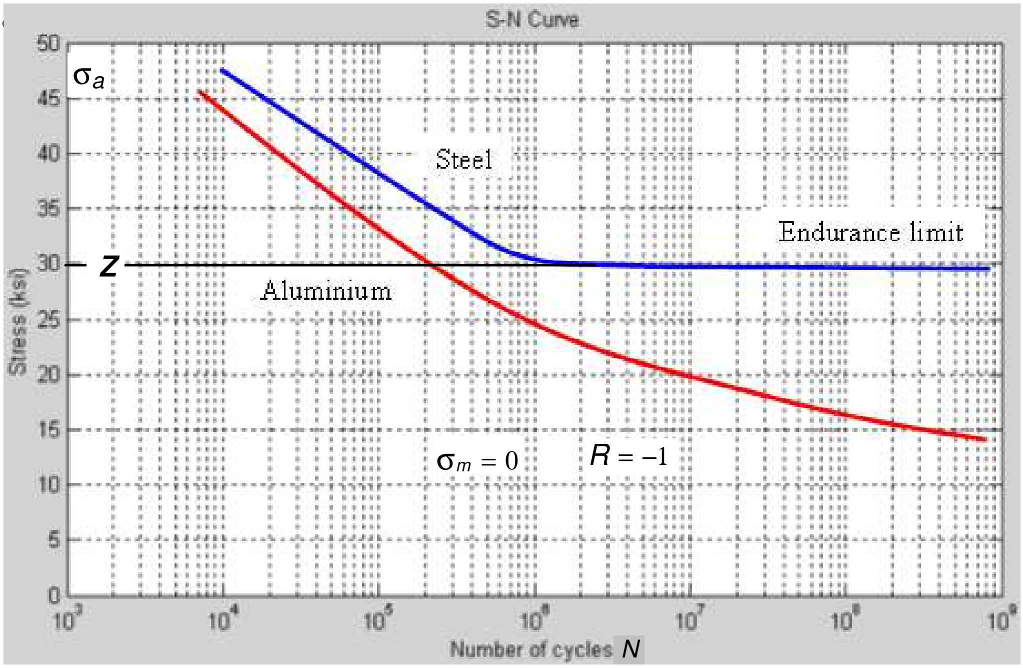
§ 3. Badania wytrzymałości zmęczeniowej

Pierwszym badaczem wytrzymałości zmęczeniowej był August Wöhler (1819–1914). Uwagę swoją skupił na oscylacjach symetrycznych ($\sigma_m = 0$). Wyniki badań przedstawił w formie krzywych $\sigma_a = \sigma_a(N)$, zwanych obecnie *wykresami* (*krzywymi*) *Wöhlera* (rys. 2 i rys. 3), gdzie N jest liczbą oscylacji, po których próbka ulega zniszczeniu.

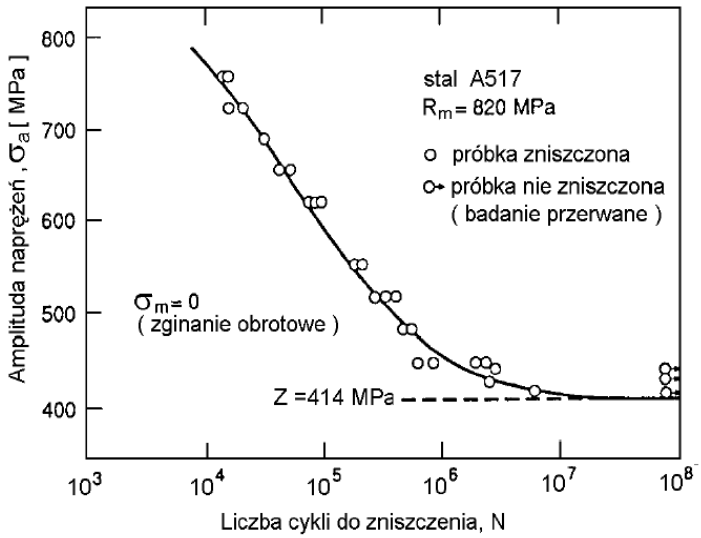
W przypadku obciążeń symetrycznych, jak na rys. 2 i rys. 3, na osi rzędnych jest stała amplituda naprężeń $\sigma_a = \sigma_{max}$, a w przypadku naprężeń jednostronnie zmiennych (pulsujących) – podwojona amplituda naprężeń $2\sigma_a = \sigma_{max}$, czyli zakres zmian naprężeń $\Delta\sigma$, zaś na osi odciętych jest liczba oscylacji N w układzie logarytmicznym. Wytrzymałość zmęczeniowa (asymptota pozioma krzywej Wöhlera) oznaczona jest przez Z.

Widzimy, iż stal posiada wytrzymałość zmęczeniową, natomiast aluminium – nie, tj. dla aluminium $Z = 0$ (rys. 2). Inaczej mówiąc, przy każdym obciążeniu oscylacyjnym element wykonany z aluminium utraci integralność. To tylko kwestia liczby oscylacji, czyli czasu, po którym element ulegnie zniszczeniu, bez względu na obciążenie. Stąd konstrukcja samolotu może być eksploatowana jedynie przez ściśle określony czas.

Podobnie okręty, z powodu obciążeń falowych, nie mogą być eksploatowane dowolnie długo, gdyż zazwyczaj amplitudy oscylacji są powyżej granicy wytrzymałości *Z*.



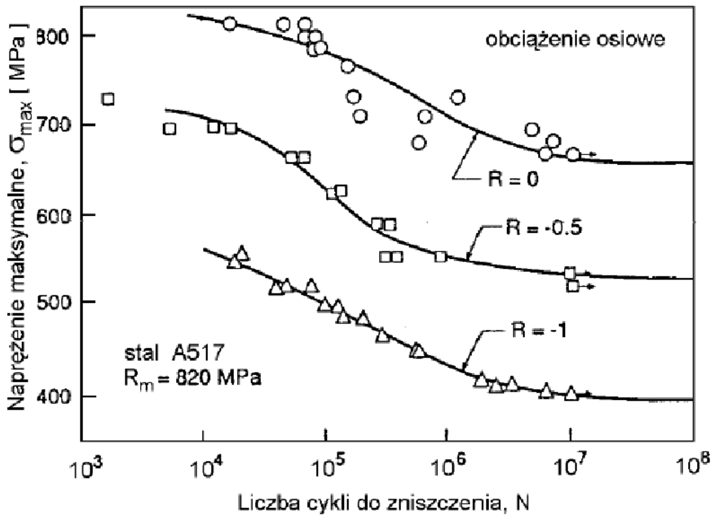
Rys. 2. Wykres Wöhlera dla aluminium i stali [Wikipedia]



Rys. 3. Wykres Wöhlera dla stali [1]

Gdy brak jest asymptoty (np. stopy Al, Cu), za granicę zmęczenia $Z = \sigma_a$ przyjmuje się umowną wartość dla $N = 10^7$, tj. 10 Mc lub 10^8 cykli (100 megacykli). Wytrzymałość zmęczeniowa jest stałą materiałową, ale zależy od sposobu obciążania, np. przy zginaniu jest o 10÷15% wyższa niż przy rozciąganiu. Dla stali A517 wytrzymałość zmęczeniowa dla oscylacji symetrycznych wynosi $Z \approx ½R_m$, gdzie R_m jest wytrzymałością doraźną (rys. 3). Na wytrzymałość zmęczeniową, oprócz naprężeń średnich σ_m, wpływa także obecność karbu, mikrostruktura oraz korozja. Zagadnień tych nie będziemy jednak tu omawiali.

Aby określić wytrzymałość zmęczeniową dla niesymetrycznych oscylacji, musielibyśmy dysponować parametrycznymi krzywymi Wöhlera σ_a w zależności od liczby oscylacji N niszczącej próbkę, dla szeregu stałych naprężeń średnich $\sigma_m = const$ lub stałego współczynnika asymetrii R, jako parametru (rys. 4). Danych takich jest mało, bowiem pochodzą z uciążliwych badań laboratoryjnych. Chcemy zatem mieć prostą metodę określania wytrzymałości zmęczeniowej w dowolnym przypadku, a nie tylko dla dwóch standardowych sytuacji, tj. $\sigma_m = 0$, $R = -1$ (oscylacje symetryczne) i $\sigma_m = ½\sigma_{max}$, $R = 0$ (oscylacje pulsujące).



Rys. 4. Krzywe Wöhlera dla stali w zależności od współczynnika asymetrii R [1]

Gdy naprężenia średnie są dodatnie, tj. $\sigma_m > 0$, to dla wszystkich przypadków oscylacji niesymetrycznych współczynnik asymetrii R jest z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$. Gdy naprężenia średnie σ_m i amplituda oscylacji σ_a są stałe, parametry oscylacji, jak σ_{max}, σ_m, σ_a czy $\Delta\sigma$ powiązane są wzajemnie ze sobą przez współczynnik asymetrii R, który jest też stały – patrz wzory (3) do (5). Wystarczy zatem znać krytyczne wartości dla jednego z tych parametrów, by wyznaczyć pozostałe parametry. Krytyczne parametry zmęczenia nieskończenie cyklowego dla stali podane są w tab. 1 w proporcji do wytrzymałości doraźnej R_m. Dla obciążenia stałego krytyczną wartością jest granica plastyczności R_e.

Tab. 1. Krytyczne parametry zmęczenia dla stali

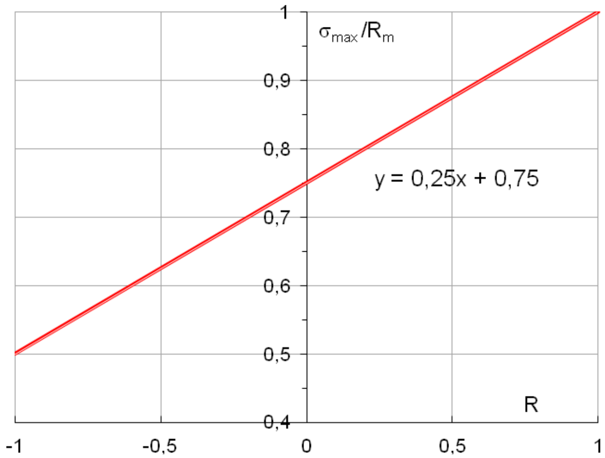
R	Oscylacje	σ_m	$(\sigma_{max})_{kryt}$	$(\sigma_a)_{kryt}$	$(\Delta\sigma)_{kryt}$
–1	symetryczne	0	$½R_m$	$½R_m$	R_m
0	jednostronne	$0{,}4R_m$	$0{,}8R_m$	$0{,}4R_m$	$0{,}8R_m$
1	obciążenie stałe	R_e	R_e	0	0

Dopuszczalne wartości parametrów zmęczeniowych (nieskończenie cyklowych) otrzymamy, biorąc 60% wartości krytycznych z tab. 1, zestawione w tab. 2.

Tab. 2. Dopuszczalne parametry zmęczenia dla stali

R	Oscylacje	σ_m	$(\sigma_{max})_{dop}$	$(\sigma_a)_{dop}$	$(\Delta\sigma)_{dop}$
–1	symetryczne	0	$0{,}3R_m$	$0{,}3R_m$	$0{,}6R_m$
0	jednostronne	$0{,}24R_m$	$0{,}48R_m$	$0{,}24R_m$	$0{,}48R_m$
1	obciążenie stałe	$0{,}6R_e$	$0{,}6R_e$	0	0

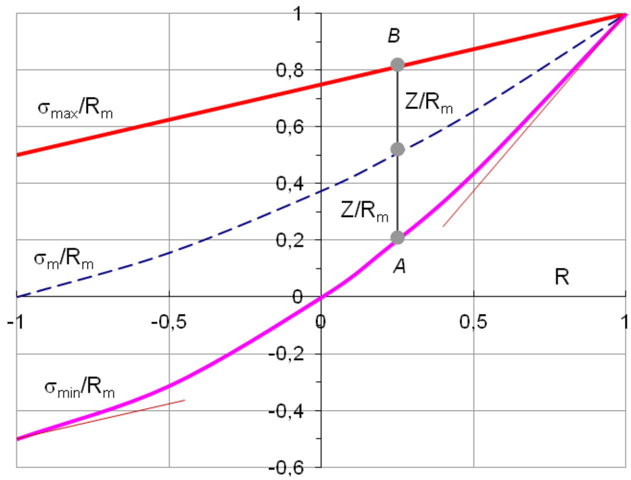
Znając krytyczne parametry zmęczeniowe naprężeń dla $R = -1$, 0 i 1, na drodze interpolacji możemy znaleźć parametry zmęczeniowe dla dowolnych współczynników asymetrii R. Dla stali A517 σ_{max} zmienia się liniowo (rys. 5). Dla innych gatunków stali przebieg σ_{max}/R_m na ogół niewiele odbiega od linii prostej.



Rys. 5. Dopuszczalne wartości σ_{max}/R_m dla stali A517, w zależności od współczynnika asymetrii R

Wymowę rys. 5 można znacznie pogłębić, dodając przebieg naprężeń minimalnych σ_{min} i średnich σ_m (rys. 6). Górna i dolna krzywa wyznacza dopuszczalny zakres zmian naprężeń podczas oscylacji $\Delta\sigma$. Ze wzorów (3) do (5) wynika, że przebieg krzywych σ_m,

σ_{min}, σ_a i $\Delta\sigma$ zależy wyłącznie od przebiegu krzywej σ_{max}.



Rys. 6. Dopuszczalne parametry zmęczeniowe dla stali A517
dla nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej

Współczynnik rozwarcia krzywych σ_{max}/R_m i σ_{min}/R_m w punkcie $R = 1$, równa się -1, niezależnie od krzywej σ_{max}/R_m, co można łatwo udowodnić. Ze wzoru (5) mamy:

$$\Delta\sigma/R_m = (1 - R)\sigma_{max}/R_m.$$

Różniczkując wzór względem R, otrzymamy:

$$(\Delta\sigma/R_m)' = -\sigma_{max}/R_m + (1 - R)(\sigma_{max}/R_m)'. \tag{6}$$

W granicy, dla $R = 1$, uwzględniając, że $\sigma_{max}/R_m = 1$, otrzymamy:

$$(\Delta\sigma/R_m)' = -1, \tag{7}$$

co potwierdza rys. 6. Linia górna na tym rysunku ma współczynnik kierunkowy ¼, zaś styczna do linii dolnej – współczynnik 5/4. Z kolei podstawiając $R = -1$ we wzorze (6), otrzymamy współczynnik rozwarcia krzywych σ_{max}/R_m i σ_{min}/R_m na lewym końcu rys. 6. Korzystając z danych na rys. 5, otrzymamy:

$$(\Delta\sigma/R_m)' = -½ + 2 \cdot ¼ = 0,$$

co potwierdza rys. 6.

Dla zadanego współczynnika asymetrii R, dopuszczalne oscylacje naprężeń odbywają się między punktami A i B, wokół środka odcinka AB, tj. średnich naprężeń (rys. 6). Obszar między górną i dolną krzywą jest obszarem bezpiecznym, tj. element może wytrzymać bez uszkodzenia nieskończoną liczbę oscylacji o stałej amplitudzie. Jak widać, ze wzrostem R, σ_{max} *rośnie*, lecz dopuszczalna amplituda oscylacji $Z \equiv (\sigma_a)_{dop}$ *maleje*. Gdy $\sigma_a > Z$ wchodzimy w obszar *ograniczonej* wytrzymałości zmęczeniowej, charakteryzowaną liczbą oscylacji N do zniszczenia próbki.

W okrętownictwie dopuszczalną wartość amplitudy oscylacji nie wyznacza się dla granicy zmęczeniowej Z, gdyż byłaby za niska, lecz dla liczby oscylacji $N = 10^7 \div 10^8$. Oscylacje naprężeń w węzłach konstrukcyjnych statku pochodzą od falowania, które ma okresy o kilka rzędów większe w porównaniu do tych w budowie maszyn, rzędu sekund, zamiast milisekund. Szacuje się, że w okresie eksploatacji równym 25 lat statek doznaje 10^8 oscylacji (100 Mc). Nie warto zatem projektować wytrzymałości zmęczeniowej na nieskończoną liczbę oscylacji – wiązania statku byłyby przewymiarowane.

§ 4. Prezentacja parametrów zmęczeniowych

Ogromna większość badań wytrzymałości zmęczeniowej dotyczy oscylacji obustronnie zmiennych (wahadłowych), jak na rys. 2 i rys. 3, wokół poziomu $\sigma_m = 0$. Stąd w literaturze można spotkać rozważania, jak na podstawie znajomości wytrzymałości zmęczeniowej dla oscylacji obustronnie zmiennych uzyskać wytrzymałość zmęczeniową przy niezerowych naprężeniach średnich $\sigma_m \neq 0$. Jedną z możliwości jest dodatkowa znajomość wytrzymałości zmęczeniowej dla oscylacji tętniących, w połączeniu z interpolacją, omówioną poprzednio (rys. 5 i rys. 6). W przypadku statku, σ_m jest stałym naprężeniem, jakie występuje w elemencie konstrukcyjnym na wodzie spokojnej. Jest ono funkcją stanu załadowania. Zależy od rozłożenia mas na statku.

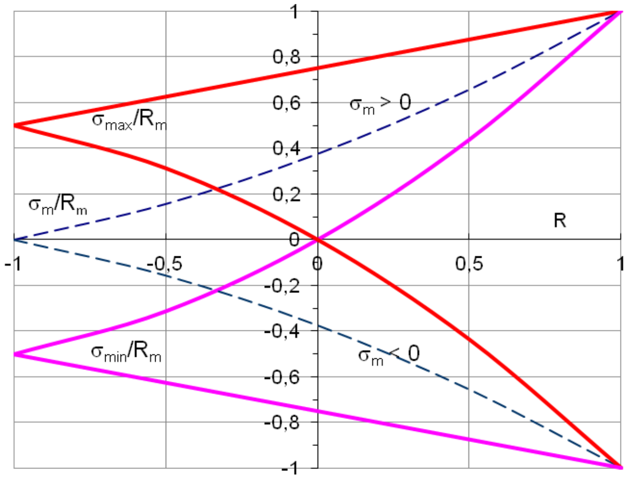
Gdy mówimy o niezerowych naprężeniach średnich, zazwyczaj mamy na myśli przypadek, gdy $\sigma_m > 0$. Danych dla ujemnych naprężeń średnich $\sigma_m < 0$ jest mało. Obciążenia niesymetryczne dla ściskających naprężeń średnich charakteryzuje się współczynnikiem asymetrii R, równym ilorazowi naprężeń maksymalnych i minimalnych:

$$R = \sigma_{max}/\sigma_{min}, \tag{8}$$

odwrotnie, jak w przypadku dodatnich naprężeń średnich $\sigma_m > 0$. Łatwo zauważyć, że współczynnik asymetrii dla ujemnych naprężeń średnich jest z przedziału $R \in \langle -1, 1 \rangle$, jak w przypadku dodatnich naprężeń średnich, przy czym:

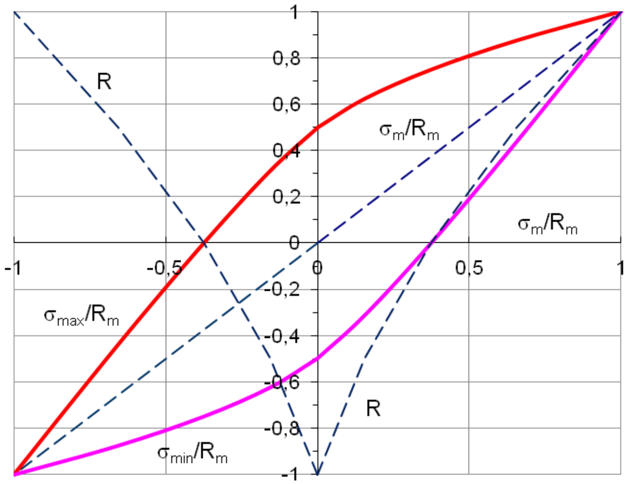
$R = -1$, dla oscylacji obustronnie zmiennych,
$R = 0$, dla oscylacji pulsujących ujemnych (ściskających),
$R = 1$, dla obciążenia stałego ściskającego.

Wykres dopuszczalnych parametrów zmęczeniowych dla stali, obejmujących dodatnie naprężenia średnie (rozciągające) i ujemne (ściskające), w funkcji współczynnika asymetrii R, pokazany jest na rys. 7. Przedstawienie to jest nieznane w literaturze. Dla uproszczenia przyjmuje się, że przebieg dopuszczalnych amplitud oscylacji $Z \equiv (\sigma_a)_{dop}$ czy dopuszczalnego zakresu zmian naprężeń podczas oscylacji $(\Delta\sigma)_{dop}$ w funkcji współczynnika asymetrii R nie zależy od znaku średnich naprężeń oscylacji σ_m. Uzasadnić to można przez analogię do naprężeń zredukowanych σ_{red}, które nie zależą od znaku naprężeń normalnych.



Rys. 7. Dopuszczalne parametry zmęczeniowe dla stali A517 w pełnym zakresie naprężeń średnich σ_m, w zależności od współczynnika asymetrii R

Wykres dopuszczalnych parametrów zmęczeniowych przedstawia się najczęściej nie w funkcji współczynnika asymetrii R, jak na rys. 7, lecz w funkcji średniego poziomu naprężeń σ_m. Jedna z możliwości to przedstawienie dopuszczalnych zmian naprężeń σ_{min} i σ_{max} w zależności od naprężeń średnich σ_m, zwane *wykresem Smitha* (rys. 8).

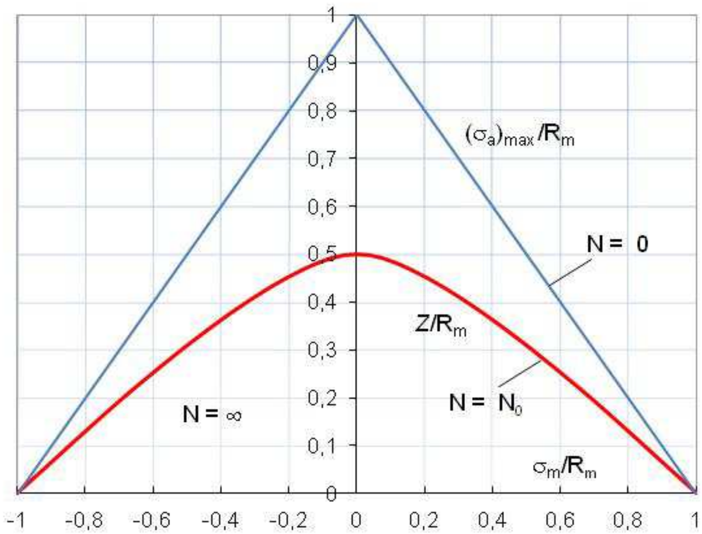


Rys. 8. Wykres Smitha dopuszczalnych zmian naprężeń dla stali A517 w zależności od naprężeń średnich σ_m dla nieskończonej liczby oscylacji

Jak widać wykres ma kształt zbliżony do równoległoboku. Gdy naprężenia σ są z przedziału $\langle\sigma_{min}, \sigma_{max}\rangle$, dla zadanego σ_m, próbka nie ulegnie zniszczeniu bez względu na liczbę oscylacji. W takim przypadku mówi się o wytrzymałości zmęczeniowej *nieskończenie cyklowej* lub o *nieograniczonej trwałości zmęczeniowej*. Linia środkowa σ_m/R_m na rys. 8 jest prostą, której współczynnik nachylenia wynosi 1. Z rys. 6 wynika, że krzywe σ_{max}/R_m i σ_{min}/R_m nie mają załamania w punkcie $\sigma_m = 0$, odpowiadającym oscylacjom wahadłowym, o współczynniku asymetrii $R = -1$.

Na rys. 8 pokazany jest także przebieg współczynnika asymetrii R. Krzywe te zerują się w punktach $\sigma_{max} = \sigma_{min} = 0$, odpowiadających oscylacjom pulsującym. Jak widać są one obrócone o 90° w stosunku do krzywych na rys. 7. Są to bowiem krzywe odwrotne, o przestawionych osiach.

Druga z możliwości polega na przedstawieniu dopuszczalnych amplitud naprężeń $(\sigma_a)_{dop} \equiv Z$ w zależności od naprężeń średnich σ_m (rys. 9), zwany *wykresem Haigha*, o podstawowym znaczeniu w okrętownictwie. Gdy amplituda oscylacji σ_a nie przekracza wartości dopuszczalnej $(\sigma_a)_{dop}$ na dolnej linii, próbka nie ulegnie zniszczeniu bez względu na liczbę oscylacji, czyli ma nieograniczoną wytrzymałość zmęczeniową. W przeciwnym przypadku ulegnie zniszczeniu po określonej liczbie oscylacji, zmieniającej się od $N = N_0$ na dolnej krzywej, do $N = 0$ na górnej linii, wynikającej z warunku wytrzymałości doraźnej $\sigma_{max} = R_m$ (na dolnej linii występuje więc skok N). Z rys. 6 wynika, że wykres $Z \equiv (\sigma_a)_{dop}$ ma gładki wierzchołek w punkcie $\sigma_m = 0$, odpowiadający oscylacjom symetrycznym o współczynniku asymetrii $R = -1$, co potwierdza rys. 9.



Rys. 9. Wykres Haigha dopuszczalnych amplitud oscylacji naprężeń dla stali A517 w zależności od naprężeń średnich σ_m

Wykresy dopuszczalnych parametrów zmęczeniowych stali, podane na rys. 7, rys. 8 i rys. 9, określające nieograniczoną wytrzymałość zmęczeniową, dotyczą oscylacji *stacjonarnych*, tj. o stałej amplitudzie oscylacji σ_a.

§ 5. Wpływ granicy plastyczności R_e na obszar bezpiecznych oscylacji

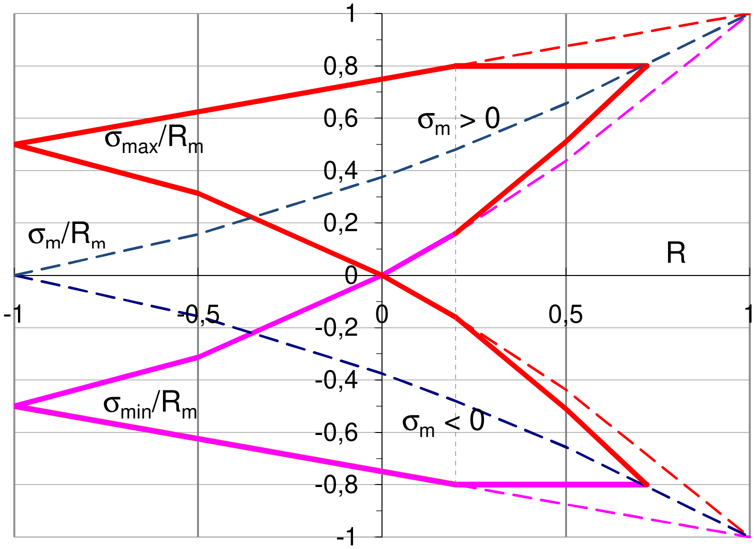
Dotychczas obszar dopuszczalnych amplitud naprężeń określaliśmy bez uwzględniania granicy plasyczności R_e. Z oczywistych względów nie chcemy, by maksymalna wartość naprężeń σ_{max} przekraczała podczas oscylacji granicę plastyczności R_e, czy minimalna wartość naprężeń σ_{min} schodziła poniżej $-R_e$, tj. by $\sigma_{min} < -R_e$. Nie chcemy bowiem, by pod wpływem oscylacyjnego obciążenia powstawały trwałe odkształcenia plastyczne. Tak więc:

$$\sigma_{max}/R_m \le R_e/R_m,$$
$$\sigma_{min}/R_m \ge -R_e/R_m.$$

Przykładowo, jeśli stosunek $R_e/R_m = 0{,}8$, to:

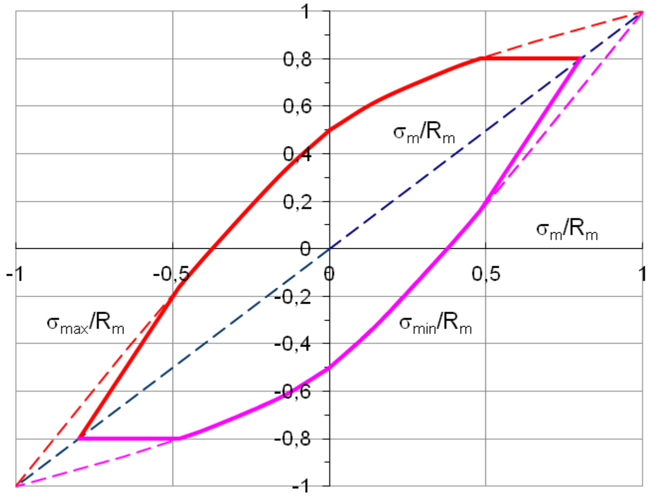
$$\sigma_{max}/R_m \le 0{,}8,$$
$$\sigma_{min}/R_m \ge -0{,}8.$$

Oznacza to, że na rys. 7 krzywa σ_{max}/R_m ma być obcięta na poziomie 0,8, a krzywa σ_{min}/R_m – obcięta na poziomie –0,8 (rys. 10). Załamanie krzywych granicznych występuje w punkcie $R = 0{,}2$. Krzywa środkowa σ_m/R_m nie ulega zmianie, co implikuje odpowiednie zmiany dla $R > 0{,}2$, widoczne na rys. 10.

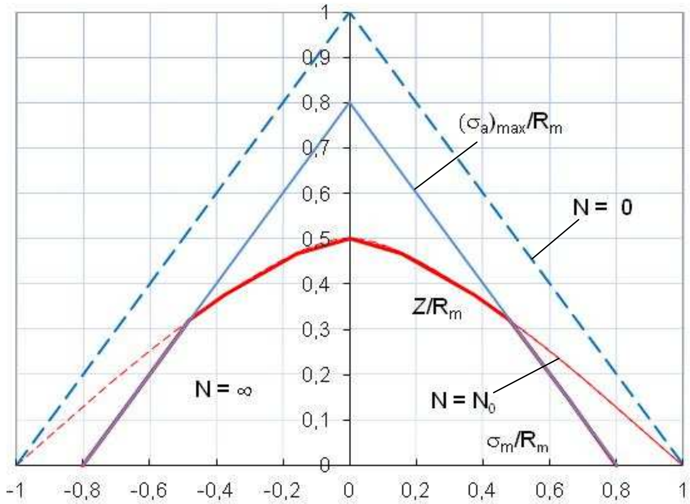


Rys. 10. Dopuszczalne parametry zmęczeniowe dla stali, z uwzględnieniem granicy plastyczności R_e, w zależności od współczynnika asymetrii R

Analogiczne zmiany na wykresach Smitha i Haigha pokazane są na rys. 11 i rys. 12. Z rys. 12 widać, że średnia wartość naprężeń σ_m zmniejsza dopuszczalną amplitudę oscylacji, nawet gdy naprężenia średnie, co do modułu, są niewielkie.



Rys. 11. Wykres Smitha dopuszczalnych zmian naprężeń dla stali, z uwzględnieniem granicy plastyczności R_e, w zależności od naprężeń średnich σ_m



Rys. 12. Wykres Haigha dopuszczalnych amplitud naprężeń dla stali A517, z uwzględnieniem granicy plastyczności R_e, w zależności od naprężeń średnich σ_m

§ 6. Aproksymacja wykresów Wöhlera

Krzywe Wöhlera $\sigma_a = \sigma_a(N)$ bardzo dobrze aproksymuje się w podwójnym układzie logarytmicznym. Dla oscylacji symetrycznych są one wówczas liniami prostymi (dla $\sigma_a > Z$). Znaczy to, że mogą być aproksymowane funkcjami potęgowymi. Zadziwiające, że na ich przebieg nie ma wpływu granica plastyczności R_e, co widać na rys. 3.

Stosuje się dwa równania:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= AN^b, \\ \sigma_a &= \sigma'(2N)^b, \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie A, σ', b to stałe, które wyznacza się z dopasowania do krzywej, zaś N jest liczbą oscylacji do zniszczenia próbki. Drugi z tych wzorów nazywa się wzorem *Basquina*. We wzorze tym $2N$ oznacza liczbę nawrotów podczas N oscylacji. Stałe A i σ' mają wymiar naprężeń. Biorąc jeden nawrót $2N = 1$ otrzymamy, że stała $\sigma' = \sigma_a$ jest amplitudą niszczącą dla $N = ½$ na krzywych Wöhlera. Łatwo ją otrzymać wykreślnie, biorąc odczyt dla $N = ½$ w podwójnym układzie logarytmicznym (na rys. 2, rys. 3 i rys. 4 jest to trudne do zrealizowania, bo oś rzędnych nie jest w układzie logarytmicznym).

Wzory (9) są tożsame, czego nie widać na pierwszy rzut oka. Przekształcając algebraicznie wzór Basquina, otrzymamy:

$$\sigma_a = (2^b\sigma')N^b.$$

Z porównania z pierwszym wzorem wynika, że:

$$A = 2^b\sigma'.$$

Stała $A = \sigma_a$ ma znaczenie amplitudy niszczącej dla $N = 1$. Stąd, $A < \sigma'$, bo $\sigma' = \sigma_a$ ma znaczenie amplitudy niszczącej dla $N = ½$. Różnica między nimi wynosi w przybliżeniu 10%, dokładnie $A/\sigma' = 2^b$. Różnica zależy więc od wykładnika b. Obie stałe są większe od wytrzymałości doraźnej R_m, bywa że nawet dwukrotnie, co oznacza, że aproksymacja jednomianowa nie jest ścisła.

Logarytmując stronami wzory (9), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \lg\sigma_a &= \lg A + b\lg N, \\ \lg\sigma_a &= \lg\sigma' + b\lg 2 + b\lg N. \end{aligned}$$

Wykładnik b ma znaczenie nachylenie wykresów Wöhlera w układzie logarytmicznym. Ponieważ krzywe są opadające, wykładnik $b < 0$. Dla stali specjalnych i stopowych, $b \in -\langle 0{,}07,\ 0{,}14\rangle$, dla stali okrętowych, $b \sim -0{,}20$ jest co do modułu większe, z uwagi na zastosowanie do oscylacji niestacjonarnych.

Wzory (9) podają dopuszczalną amplitudę oscylacji naprężeń $(\sigma_a)_{dop}$ dla oscylacji symetrycznych, czyli dla zerowych naprężeń średnich $\sigma_m = 0$. Wpływ naprężeń średnich na dopuszczalną amplitudę oscylacji podaje wzór *Morrowa*:

$$(\sigma_a)_{dop} = (\sigma' - |\sigma_m|)(2N)^b. \tag{10}$$

Moduł we wzorze (10) jest potrzebny, gdyż amplituda jest z definicji dodatnia. Dalej, wzór jest parzysty względem σ_m, co zgodne jest też z rys. 9.

W wielu zastosowaniach pomija się wpływ naprężeń średnich σ_m na wytrzymałość zmęczeniową, choć jest istotny. Czynią tak np. towarzystwa klasyfikacyjne. Naprężenia średnie σ_m, bez względu na znak, zmniejszają dopuszczalną amplitudę oscylacji $(\sigma_a)_{dop}$, co widać na rys. 9. Pomijając wpływ naprężeń średnich σ_m, znacznie *zawyżamy* wytrzymałość zmęczeniową. Dlatego w miarę możliwości wpływ ten należy uwzględniać.

W zastosowaniach najczęściej zadana jest amplituda oscylacji. Wobec czego interesuje nas liczba oscylacji, które próbka wytrzyma. Inaczej mówiąc, potrzebna jest funkcja odwrotna do krzywej Wöhlera. Korzystając ze wzoru (9), otrzymamy:

$$N = (\sigma_a/A)^{1/b}.$$

Wprowadzając oznaczenie $1/b = -m$, otrzymamy:

$$N = (A/\sigma_a)^m, \tag{11}$$

gdzie stała $A \equiv \sigma_{a1}$ ma znaczenie amplitudy niszczącej dla $N = 1$, ma więc dużą wartość. Wzór (11) wyraża zatem wykres Wöhlera za pomocą punktu początkowego ($N = 1$, $\sigma_a = A$). Można równie dobrze wyrazić ją w kategoriach punktu końcowego ($N = N_0$, $\sigma_a = Z$), gdzie najczęściej $N_0 = 10^7$. Podstawiając do wzoru (11) współrzędne punktu końcowego, otrzymamy równanie:

$$N_0 = (A/Z)^m,$$

które definiuje stałą A:

$$A = ZN_0^{1/m}.$$

Podstawiając ją do wzoru (11), otrzymamy wzór:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{Z}{\sigma_a}\right)^m \tag{12}$$

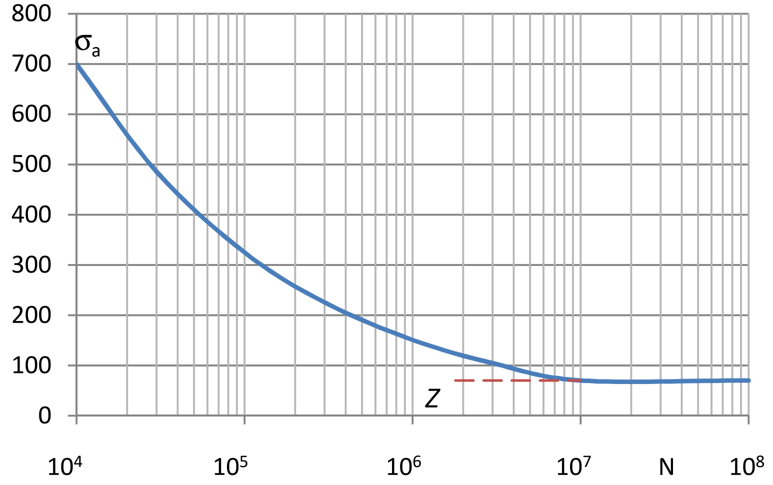
ważny dla $\sigma_a \geq Z$. Gdy $\sigma_a < Z$ mamy do czynienia z nieograniczoną wytrzymałością zmęczeniową, tj. $N = \infty$. Granicę wytrzymałości zmęczeniowej Z określa wykres Haigha (rys. 9) dla zadanej wartości naprężeń średnich σ_m.

Gdy jakiś metal (stopy Al, Cu) nie ma granicy zmęczeniowej Z, korzystamy z umownie wybranej granicy zmęczeniowej $Z = Z_0$ dla $N = N_0$, najczęściej $N_0 = 10^7$, pełniącej rolę punktu referencyjnego. Wykres Wöhlera ma wtedy postać:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{Z_0}{\sigma_a}\right)^m$$

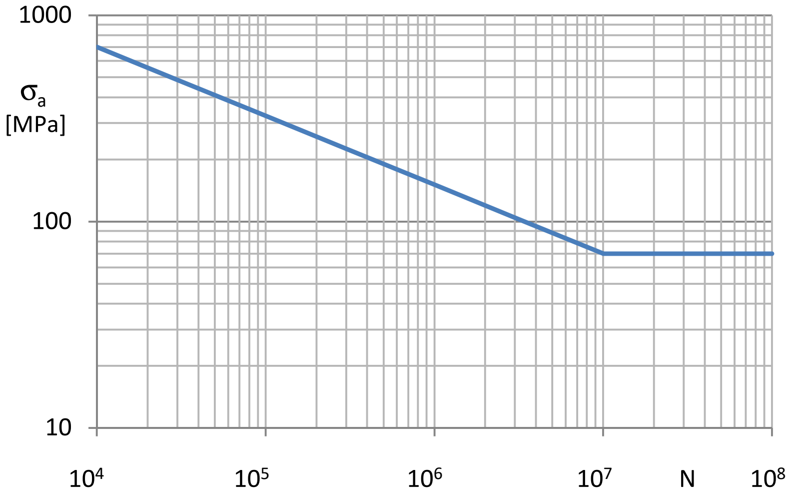
Punkt referencyjny nie ma wpływu na przebieg krzywej Wöhlera.

Dla N z przedziału $\langle 10^4, 10^7 \rangle$, iloraz N_0/N jest z przedziału $\langle 1, 1000 \rangle$. Z tego względu na osi N stosuje się skalę logarytmiczną (rys. 13).



Rys. 13. Przykładowa krzywa Wöhlera (Z = 70 MPa, m = 3)

Jeszcze lepsze przedstawienie krzywej Wöhlera jest w podwójnym układzie logarytmicznym, gdy skalę logarytmiczną stosuje się także na osi σ_a. Krzywa Wöhlera w takim układzie jest linią prostą (rys. 14).



Rys. 14. Przykładowy wykres Wöhlera w podwójnym układzie logarytmicznym

W okrętownictwie liczbę oscylacji N do zniszczenia elementu wyraża się w kategoriach zakresu zmian naprężeń $\Delta\sigma \equiv 2\sigma_a$. Wprowadzając oznaczenia: $C \equiv 2A$, wzór (11) przyjmie postać:

$$N = (C/\Delta\sigma)^m, \tag{13}$$

gdzie C jest stałą wymiarową, a wykładnik m – bezwymiarową; obie zależą od typu krzywej (tab. 3). Stałe te opracowane zostały przez Health & Safety Executive (HSE), brytyjską instytucję zajmującą się m.in. bezpieczeństwem konstrukcji stalowych, oraz przez International Institute of Welding (IIW). Iloraz $C/\Delta\sigma \equiv A/\sigma_a$ jest bezwymiarowy; obie wielkości są w MPa.

Tab. 3. Parametry C i m oraz punkt załamania krzywych Wöhlera wg HSE

Typ krzywej	$N \le 10^7$		$N > 10^7$		$\Delta\sigma_0$ dla $N_0 = 10^7$
	m	C	m	C	
B	4	5 641,9	6	1 471,0	100,3
C	3,5	7 819	5,5	280,8	78,2
D	3	11 498	5	1 340,5	53,4
E	3	10 086	5	1 175,9	46,8
F	3	8 581	5	1 000,5	39,8
F2	3	7 565	5	882,1	35,1
G	3	6 284	5	732,6	29,2
W	3	4 527	5	527,8	21,0

Stałe C i m wg HSE i IIW są takie same, tym samym takie same są też krzywe Wöhlera. Różnią się jedynie położeniem punktu załamania. Obie krzywe nie mają asymptoty poziomej Z, co pozornie jest sprzeczne z doświadczeniem, są bowiem kalibrowane na przypadek oscylacji niestacjonarnych, zmiennoamplitudowych, jakich doznaje statek na wodzie sfalowanej.

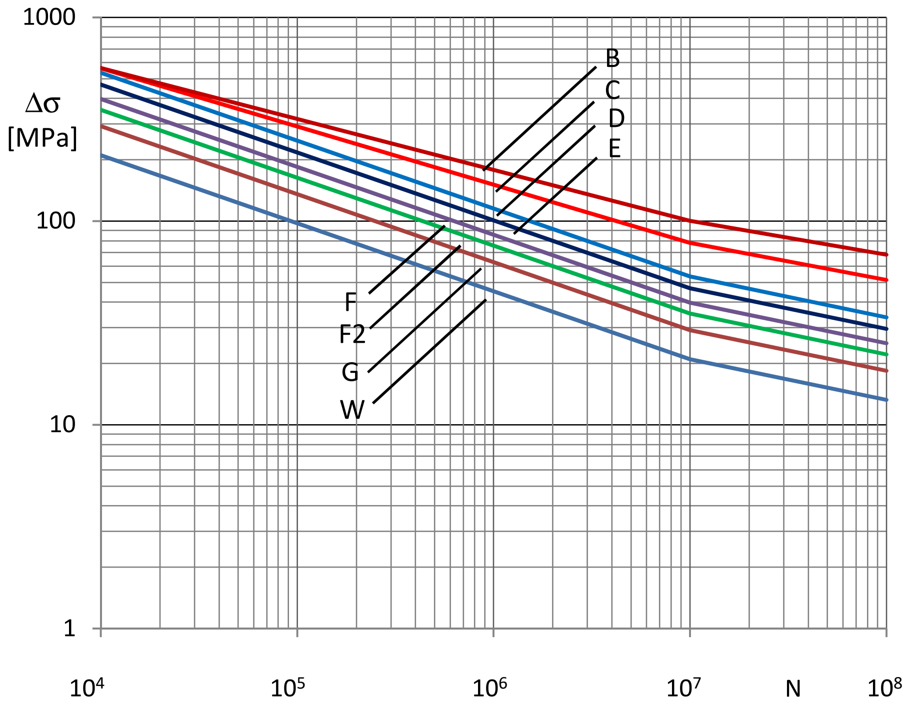
Krzywe Wöhlera wg HSE dla ośmiu typowych węzłów konstrukcyjnych kadłuba, zestawionych w tabeli 2.4.2 w przepisach [2], pokazane są na rys. 15.

Matematyczna postać krzywych dana jest wzorem (13). W podwójnym układzie logarytmicznym jest to linia łamana. Punkt załamania występuje dla $N = 10^7$ cykli oscylacji (10 megacykli). Zakres naprężeń $\Delta\sigma \equiv \Delta\sigma_0$ w punkcie załamania dla $N = 10^7$ wynika ze wzoru (13). Mianowicie:

$$\Delta\sigma_0 = C/(10^7)^{1/m}.$$

Wartości te podane są w tab. 3, w zależności od typu elementu. W punkcie załamania występuje skok parametru C, by zachować ciągłość linii, co widać w tab. 3. Jak widać, po obu stronach załamania różni się on znacznie, w przybliżeniu o rząd.

Ze wzoru (13) wynika, że liczba oscylacji N do zniszczenia elementu i zakres oscylacji $\Delta\sigma$ są odwrotnie proporcjonalne. Gdy zakres oscylacji zwiększy się (zmniejszy się), przykładowo 2-krotnie, to liczba oscylacji N zmniejszy się (zwiększy się) 2^m razy.



Rys. 15. Wykresy Wöhlera wg HSE

Wykorzystując znajomość zakresu naprężeń w punkcie załamania krzywych, wzór (13) możemy wyrazić w alternatywnej postaci bez stałej C. Mianowicie dla $N = 10^7$ wzór przyjmuje postać:

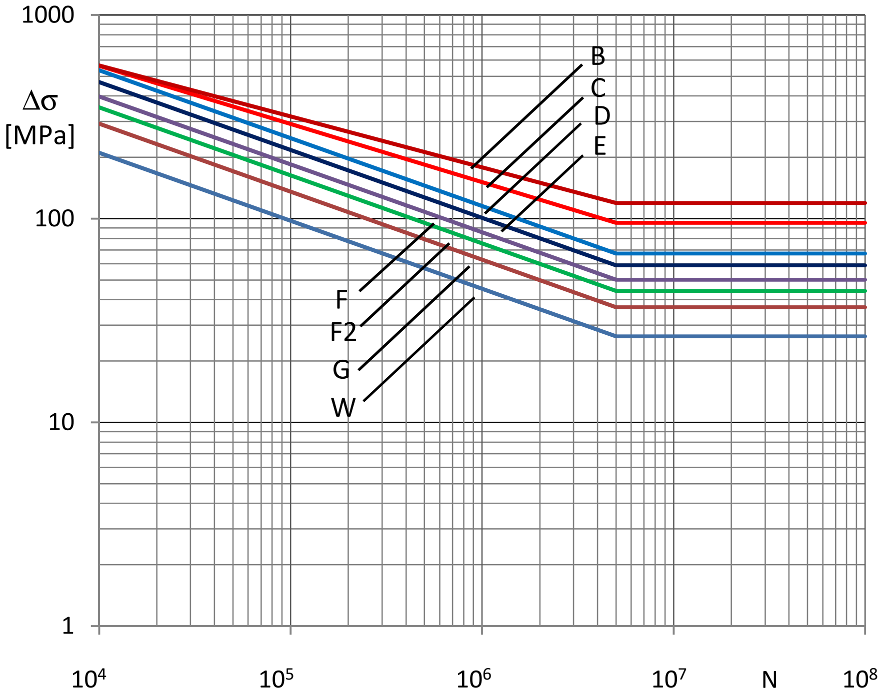
$$10^7 = (C/\Delta\sigma_0)^m.$$

Dzieląc wzór (13) przez powyższą zależność, otrzymamy alternatywny wzór:

$$N = 10^7(\Delta\sigma_0/\Delta\sigma)^m, \tag{14}$$

gdzie m zależy od typu krzywej i od tego, czy N jest większe czy mniejsze od 10^7 (tab. 3). Widzimy, że gdy zakres naprężeń $\Delta\sigma < \Delta\sigma_0$, to N jest *większe* od 10^7, a gdy $\Delta\sigma > \Delta\sigma_0$, to N jest *mniejsze* od 10^7, przy czym m zmienia się skokowo. Wzór (14) ma prostszą budowę, niż wzór (13), nie mówiąc o wzorze (2.4.3) w przepisach [2]. Jest poza tym łatwiejszy w stosowaniu, bo wykładnik potęgi jest z góry znany, zależny od stosunku $\Delta\sigma_0/\Delta\sigma$, który znamy. We wzorze (13) wykładnik zależy od N, które dopiero wyliczamy. Wzór (13) jest zatem *równaniem*, a nie wzorem. Zmusza to do korzystania z rys. 15 lub obliczania iteracyjnego. Wzór (14) jest rozwikłaniem wzoru (13) względem liczby oscylacji N.

Oryginalne krzywe Wöhlera wg IIW, uwzględniające nieograniczoną trwałość zmęczeniową, pokazane są na rys. 16. Punkt załamania występuje dla $N_0 = 5\cdot10^6 = 5$ megacykli naprężeń. Dla $N > 5\cdot10^6$, $m = \infty$, czyli przebieg krzywych jest poziomy, tożsamy z granicą zmęczenia Z. Równanie krzywych wyraża się tym samym wzorem (14) co poprzednio, gdy $\Delta\sigma > \Delta\sigma_Z$, gdzie $\Delta\sigma_Z$ jest zakresem naprężeń w punkcie załamania dla $N_0 = 5\cdot10^6$ cykli naprężeń.



Rys. 16. Oryginalne wykresy Wöhlera wg IIW

Dla stali A517 początek asymptoty Z występuje dla $N \approx 5$ Mc (rys. 3). Można zatem postawić tezę, że załamanie krzywych Wöhlera występuje dla tej samej liczby cykli naprężeń ~5 Mc, niezależnie od rodzaju i gatunku stali.

Podstawiając $N = 5\cdot10^6$ ze wzoru (14), otrzymamy równanie na $\Delta\sigma_Z$:

$$5\cdot10^6 = 10^7(\Delta\sigma_0/\Delta\sigma_Z)^3,$$

z którego wynika, że:

$$\Delta\sigma_Z = \Delta\sigma_0/0{,}5^{1/m}, \tag{15}$$

gdzie m i $\Delta\sigma_0$ podane są w tab. 3, w zależności od typu krzywej.

Dla $N < 5$ Mc krzywe na rys. 15 i rys. 16 są tożsame. Dla $N > 5$ Mc krzywe z rys. 16 przebiegają nieco wyżej niż krzywe z rys. 15.

Równanie krzywej Wöhlera można łatwo wyprowadzić metodą szkolną wiedząc, że w podwójnym układzie logarytmicznym jest to prosta. Wprowadzając oznaczenia $y = \lg \sigma_a$, $x = \lg N$, równanie prostej przyjmie postać:

$$y - y_0 = m'(x - x_0),$$

gdzie $(x_0, y_0) = (\lg N_0, \lg Z)$ to współrzędne wybranego punktu, przez który przechodzi prosta, zaś $m' < 0$ jest współczynnikiem nachylenia prostej względem osi odciętych. Wybranym punktem jest punkt załamania krzywej Wöhlera.

Uwzględniając logarytmy, równanie prostej przyjmie postać:

$$\lg (\sigma_a/Z) = m' \lg (N/N_0),$$
$$\lg (\sigma_a/Z) = \lg (N/N_0)^{m'}.$$

Opuszczając logarytmy, otrzymamy:

$$\sigma_a/Z = (N/N_0)^{m'},$$

stąd

$$N/N_0 = (\sigma_a/Z)^{1/m'}.$$

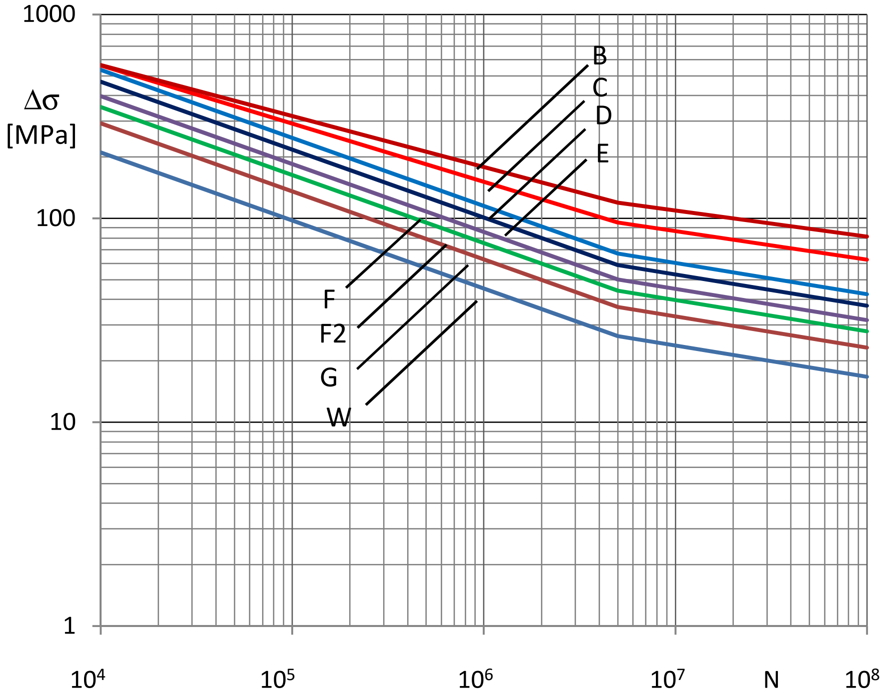
Wprowadzając oznaczenie $1/m' = -m$, otrzymamy wzór (12):

$$N = N_0(Z/\sigma_a)^m.$$

Z uwagi na to, że $Z/\sigma_a \equiv \Delta\sigma_0/\Delta\sigma$ wzór ten jest tożsamy ze wzorem (14), gdzie m jest modułem nachyleniem krzywej Wöhlera względem osi rzędnych.

Są poszlaki mówiące, że gdy amplituda oscylacji naprężeń jest *zmienna*, jak podczas pływania statku na wodzie sfalowanej, to krzywa Wöhlera nie ma asymptoty poziomej Z, czyli że nie istnieje zjawisko nieograniczonej twałości zmęczeniowej. Tym samym krzywych tych *a priori* nie da się znaleźć dla zmiennych amplitud, o podstawowym znaczeniu w okrętownictwie, można je tylko postulować. Ocenę, czy są poprawne, można uzyskać po latach, konfrontując je z przypadkami pęknięć rzeczywistych węzłów konstrukcyjnych na statkach. Z tego względu oryginalne wykresy Wöhlera z rys. 16 Germanischer Lloyd zmodyfikował na potrzeby budowy statków, jak na rys. 17.

Podobnie jak wykresy HSE z rys. 15, składają się one z dwóch półprostych o nachyleniach $m = 3$ i $m = 5$, nie licząc krzywych B i C. Punkt załamania występuje przy $N_0 = 5$ Mc $= 5 \cdot 10^6$, inaczej niż wg HSE, gdzie punkt załamania występuje przy $N_0 = 10$ Mc $= 10^7$. Z tego powodu krzywe wg IIW z rys. 17 dla $N > 5$ Mc przebiegają nieco wyżej krzywych wg HSE z rys. 15. Z powyższego wynika, że punkt załamania „okrętowych” krzywch Wöhlera jest początkiem asymptoty, wyznaczającej granicę zmęczenia dla stałoamplitudowych oscylacji naprężeń.



Rys. 17. Postulowane wykresy Wöhlera wg IIW

Nieograniczoną trwałość zmęczeniową można zakładać tylko wtedy, gdy oscylacje naprężeń mają stałą amplitudę, niewystępującą w wiązaniach statku pływającego na wodzie sfalowanej.

§ 7. Hipoteza Palmgrena-Minera

Elementy konstrukcji projektuje się zwykle pod kątem wytrzymałości *doraźnej* i *zmęczeniowej*, związanej z oscylacyjnym charakterem obciążeń dynamicznych. Wytrzymałość doraźna jest zapewniona, gdy $\sigma_{red} < \sigma_{dop}$, a zmęczeniowa – gdy liczba oscylacji $n < N$, gdzie N jest liczbą oscylacji niszczącą próbkę, znaną z laboratoryjnych badań zmęczeniowych. Wytrzymałość doraźna wynika z porównania naprężeń, zaś zmęczeniowa – z porównania liczby oscylacji. W przypadku okrętowym, naprężenie zredukowane σ_{red} uwzględnia obciążenia falowe, które mogą pojawić się jeden raz podczas 25-letniej eksploatacji statku, co odpowiada prawdopodobieństwu 10^{-8}.

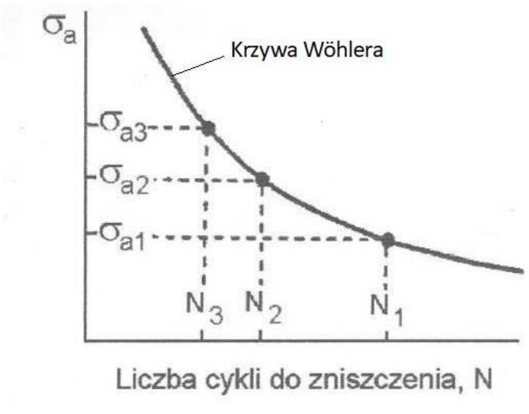
Gdy $N = \infty$, mówimy o nieskończenie cyklowej wytrzymałości zmęczeniowej, tzn. próbka wytrzyma nieskończoną liczbę oscylacji naprężeń, jeśli oscylacje są stacjonarne. Inaczej mówiąc, trwałość zmęczeniowa jest nieograniczona, oscylacje naprężeń w takim przypadku nie mają znaczenia. Obszar bezpiecznych oscylacji (przedstawiony na rys. 7, rys. 8 i rys. 9) występuje, gdy $\sigma_a < (\sigma_a)_{dop} \equiv Z$, tj. gdy stacjonarne amplitudy oscylacji są mniejsze od wartości dopuszczalnych, wyznaczonych przez granicę wytrzymałości zmęczeniowej Z.

W okrętownictwie amplitudy oscylacji naprężeń σ_a *przekraczają* wartości dopuszczalne Z. W konstrukcjach okrętowych świadomie wchodzimy w obszar ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, gdyż liczba oscylacji naprężeń w okresie 25 lat eksploatacji statku ma skończoną wartość, nominalnie równą $n = 10^8$.W takim przypadku próbka może wytrzymać skończoną liczbę oscylacji N. Gdy amplituda σ_a nieznacznie przekracza amplitudę graniczną Z, liczba oscylacji niszcząca próbkę jest duża. Mówimy wtedy o *wytrzymałości zmęczeniowej wysokocyklowej*. Z kolei, gdy amplituda σ_a znacznie przekracza amplitudę graniczną Z, liczba oscylacji N do zniszczenia próbki mocno spada. Mówimy wtedy o *wytrzymałości zmęczeniowej niskocyklowej*. Istotą tego podziału jest to, czy oscylacje naprężeń wykraczają poza pas $\langle -R_e, R_e \rangle$, czy nie, gdzie R_e jest granicą plastyczności, pokazany na rys. 10, rys. 11 i rys. 12.

Szacowanie wytrzymałości zmęczeniowej byłoby proste, gdyby amplituda oscylacji σ_a była stała w trakcie eksploatacji statku, bowiem znamy wówczas liczbę oscylacji N niszczącą próbkę. Tak jednak nie jest, statek pływa na różnych stanach morza, na których oscylacje naprężeń mają stochastyczny nieregularny charakter, o zmiennych amplitudach, podobnie jak samo falowanie. Jak wtedy ustalić stopień zużycia zmęczeniowego? Na to pytanie odpowiada hipoteza Palmgrena-Minera z 1924 i 1945 roku. Mówi ona, że stopień zużycia zmęczeniowego dany jest wzorem:

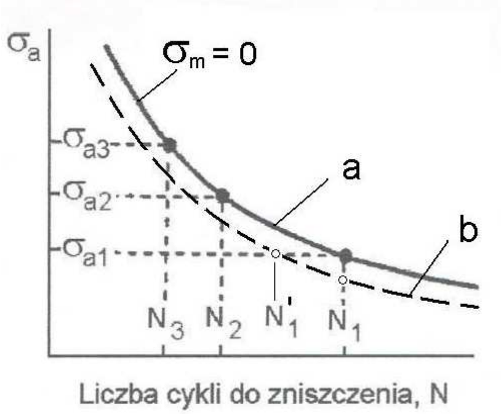
$$D = \sum(n_i/N_i), \tag{16}$$

gdzie n_i jest liczbą oscylacji z amplitudą $(\sigma_a)_i$, zaś N_i jest liczbą oscylacji niszczącą próbkę, odczytaną z krzywej Wöhlera dla amplitudy $(\sigma_a)_i$ (rys. 18). Zniszczenie następuje, gdy stopień zużycia zmęczeniowego $D \geq 1$.



Rys. 18. Liczba cykli do zniszczenia próbki w zależności od amplitudy oscylacji [1]

Krzywa Wöhlera na rys. 18 powinna uwzględniać naprężenia średnie σ_m. Ze wzoru (10) wynika, że przy stałych N naprężenia średnie zmniejszają amplitudę oscylacji σ_a (krzywa b na rys. 19). Skutkuje to zmniejszeniem liczby cykli N do zniszczenia próbki dla zadanej amplitudy oscylacji σ_a. Przykładowo dla amplitudy $(\sigma_a)_1$ zamiast liczby N_1, po korekcie mamy liczbę $N_1' < N_1$ (rys. 19). Nieuwzględnianie naprężeń średnich prowadzi więc do z a w y ż a n i a wytrzymałości zmęczeniowej.



Rys. 19. Wpływ naprężeń średnich na liczbę N

Można podać proste oszacowanie krzywej Wöhlera, uwzględniające naprężenia średnie σ_m. Wynika ono z uogólnienia wzoru (12). Mianowicie, wzór ten jest ważny także w przypadku $\sigma_m \neq 0$, jeśli Z brać z wykresu Haigha (rys. 9), dla zadanej wartości σ_m.

W przypadku krzywych Wöhlera wg IIW (rys. 17), równanie krzywych wyraża się tym samym wzorem (12), co poprzednio, gdy $\sigma_a > Z$, gdzie Z jest amplitudą oscylacji w punkcie załamania dla $N_0 = 5 \cdot 10^6$. Wartość ta jest o 26% większa od amplitudy oscylacji wg HSE w punkcie załamania dla $N_0 = 10^7$ cykli. Gdy $\sigma_a < Z$, $N = \infty$.

Wzór (12) można wyprowadzić w oparciu o wzór Morrowa (10). Ze wzoru tego wynika, że wykładnik krzywych Wöhlera nie zależy od średniego naprężenia σ_m.

Gdy średnie naprężenia σ_m i liczba oscylacji N do zniszczenia próbki są zadane, wymagana amplituda oscylacji s niszcząca próbkę dana jest wzorem (10). Zaś graniczna amplituda oscylacji Z dana jest wzorem (10) dla $N = N_0$, tj.:

$$Z = (\sigma' - |\sigma_m|)(2N_0)^b.$$

Biorąc stosunek tych dwóch wzorów, otrzymamy:

$$\sigma_a/Z = (N/N_0)^b.$$

Wyznaczając N, otrzymamy wzór (12), w którym wykładnik $m = 1/b$. We wzorze tym potrzebna jest znajomość granicznej wytrzymałości zmęczeniowej $Z \equiv (\sigma_a)_{dop}$, którą określa wykres Haigha (rys. 9) w zależności od naprężeń średnich σ_m. Znajomość nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej ma więc istotne znaczenie dla określania trwałości zmęczeniowej wiązań statku. Rozważania powyższe są dobrze uwarunkowane dla oscylacji stacjonarnych. Dla oscylacji zmiennoamplitudowych mają jedynie charakter hipotetyczny.

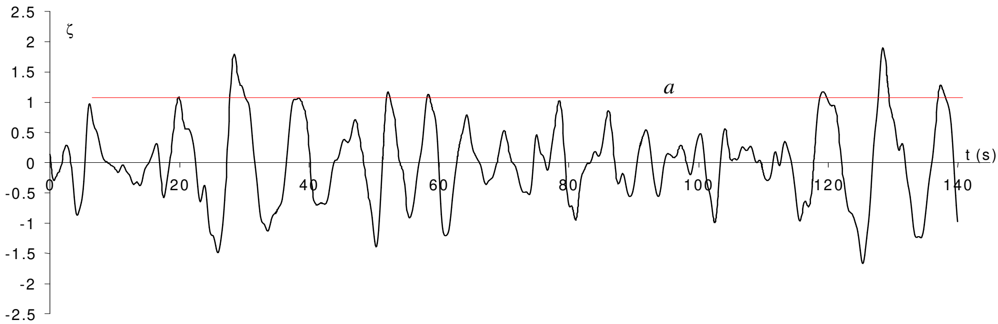
Warto pamiętać, że hipoteza Palmgrena-Minera nie jest ścisła. W wielu przypadkach może dawać wyniki wysoce niezgodne z doświadczeniem zarówno zawyżając, jak i zaniżając wytrzymałość zmęczeniową, i to aż o dwa rzędy [1].

§ 8. Oscylacje nieregularne

Oscylacje różnych wielkości, wywołane falowaniem morza, jak np. naprężenia w wiązaniach statku, są procesem stochastycznym, czyli losowym (rys. 20), zwanym też *zmiennoamplitudowym* $\zeta(t)$. Przyjmuje się, że rozkład rzędnych takiego procesu jest rozkładem *normalnym* (rozkładem Gaussa) o średniej wartości równej zero. Rozkład rzędnych scharakteryzowany jest przez *wariancję* procesu σ^2, która przy zerowej średniej sprowadza się do średniego kwadratu rzędnej:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \zeta^2(t)dt$$

gdzie długość przedziału całkowania $T \to \infty$. Operator uśredniania oznacza się literą E, zatem wzór powyższy można zapisać krótko: $\sigma^2 = E(\zeta^2)$. Sama wartość σ, czyli pierwiastek z wariancji, nazywa się *standardowym odchyleniem* rzędnych procesu; w elektrotechnice używa się też nazwy *wartość skuteczna*.

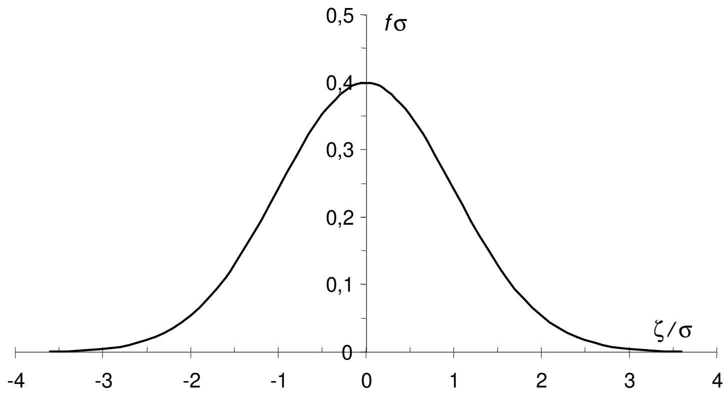


Rys. 20. Zapis procesu stochastycznego $\zeta(t)$ przez sondę; krok próbkowania 0,1 s

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (fgp) rozkładu rzędnych dana jest wzorem:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{\sigma}\right)^2}$$

gdzie (teoretycznie) $\zeta \in \langle -\infty, \infty \rangle$, co z oczywistych powodów jest nierealistyczne, bowiem rzeczywisty przedział zmienności rzędnych ζ jest skończony. Wykresem funkcji gęstości jest *krzywa dzwonowa*, pokazana na rys. 21, która dla $|\zeta| > 4\sigma$ schodzi praktycznie do zera. Prawdopodobieństwo, że $|\zeta| > 4\sigma$, czyli że rzędne falowania przekroczą co do modułu wartość 4σ, wynosi 10^{-4}, a prawdopodobieństwo przekroczenia poziomu 6σ jest mniejsze niż 10^{-9}.



Rys. 21. Funkcja gęstości rozkładu normalnego bezwymiarowych rzędnych procesu

Rozkład bezwymiarowych rzędnych *dowolnego* procesu ζ/σ jest taki sam dla *każdego* akwenu i stanu morza. Liczne pomiary potwierdzają, że faktycznie tak jest, tzn. że rozkład bezwymiarowych rzędnych jest normalny i zależy jedynie od wariancji procesu.

Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa nie przekracza zadanej wartości $\zeta = a$, dane jest wzorem:

$$P(\zeta < a) = \int_{-\infty}^{a} f(\zeta)\,d\zeta = F(\zeta)\Big|_{-\infty}^{a} \equiv F(a),$$

gdzie $F(\zeta)$ jest funkcją pierwotną w stosunku do fgp, zwaną *dystrybuantą*. Tak więc $P(\zeta < a)$ równa się wartości dystrybuanty F w punkcie $\zeta = a$, co równa się polu pod fgp od lewego krańca do zadanej wartości zmiennej losowej. Dystrybuanta rozkładu normalnego jest funkcją specjalną, dostępną w kalkulatorach naukowych i komputerach.

Często interesuje nas prawdopodobieństwo przewyższenia zadanego poziomu $\zeta = a$ przez proces losowy (rys. 20). Dane jest ono wzorem:

$$P(\zeta > a) = 1 - P(\zeta < a) = 1 - F(a),$$

gdzie $F(a)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego. Interpretacją geometryczną prawdopodobieństwa przewyższenia jest pole „ogona", czyli pole pod fgp powyżej poziomu $\zeta = a$. Ma ono ważną interpretację fizyczną – jest równe względnemu czasowi przewyższania, rozumianemu jako stosunek czasu przewyższania do czasu trwania procesu, oznaczane dalej przez P_t. Przykładowo prawdopodobieństwo przewyższania poziomu $a = 0$ wynosi 0,5, tzn. 50% czasu rzędne procesu $\zeta > 0$. Ze wzrostem poziomu a prawdopodobieństwo przewyższania P_t szybko spada. Przykładowo P_t dla poziomu $a = \sigma$ wynosi 0,159, tzn. 15,9% czasu proces przekracza poziom $a = \sigma$, prawdopodobieństwo przewyższania poziomu $a = 2\sigma$ wynosi 0,023, tzn. 2,3% czasu falowanie przekracza poziom $a = 2\sigma$ itd. Więcej o charakterystykach procesu można znaleźć w Raporcie PRS [4].

Powstaje pytanie, czy można podać prostą charakterystykę opisującą proces. Jedną z takich charakterystyk jest wariancja σ^2, czyli średni kwadrat rzędnych procesu. Charakterystyka ta ma bardzo ważną interpretację, gdyż przedstawia energię procesu. Że tak jest, łatwo pokazać na przykładzie ciepła wydzielanego na oporniku, przez który przepływa prąd o zmiennym natężeniu $i(t)$. Średnia moc wydzielana równa się średniemu kwadratowi natężenia prądu, czyli wariancji. Skoro twierdzenie to zachodzi w przypadku prądu, zachodzi także dla każdego innego procesu stochastycznego, z tą tylko różnicą, że średnia moc procesu nazywana jest energią.

Jednak procesy o tej samej wariancji mogą dość znacząco różnić się okresami, czyli jest to niepełna charakterystyka. Pełną informację o procesie możemy uzyskać zakładając, że proces powtarza się co pewien bardzo długi okres T i wobec tego jest superpozycją fal harmonicznych, zwanych w matematyce szeregiem Fouriera:

$$\zeta(t) = a_0 + \Sigma(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \tag{17}$$

gdzie $a_0 \equiv \langle\zeta\rangle$ jest średnią rzędną, sumowanie jest od $n = 1$ do ∞, zaś $\omega_0 = 2\pi/T$ jest częstością podstawową pierwszej składowej harmonicznej. Badanie szeregu Fouriera funkcji okresowej nazywa się *analizą harmoniczną*, a wyrazy szeregu Fouriera nazywane są *składowymi harmonicznymi*. Zauważmy, że kolejne składowe harmoniczne występują z krokiem ω_0. Współczynniki Fouriera a_n i b_n ze wzrostem n dążą do zera co najmniej jak $1/n$; faktycznie zanikają znacznie szybciej; n-tą składową harmoniczną można przedstawić też w postaci:

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \zeta_n \cos(n\omega_0 t - \varepsilon_n), \tag{18}$$

gdzie $\zeta_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ jest amplitudą, zaś $\varepsilon_n = \operatorname{arc\,tg} b_n/a_n$ – fazą. Wzór ten jest podstawą aproksymacji procesu. Podnosząc do kwadratu równanie (17) i całkując względem czasu w przedziale od 0 do T, a następnie dzieląc przez T, otrzymamy ważny związek:

$$\sigma^2 = a_0^2 + ½\Sigma(a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \Sigma½\zeta_n^2, \qquad \text{dla } n = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

zwany *twierdzeniem Parsevala* (1799 r.) Wyraża ono prawo zachowania energii: energia procesu, czyli wariancja, równa się sumie energii poszczególnych składowych harmonicznych. Ponieważ szereg po prawej stronie wzoru (19) zawiera nieskończenie wiele składników, składniki te powyżej pewnego n muszą zanikać co najmniej jak $1/n^2$, by ich suma była skończona, co zgadza się z poprzednim wnioskiem, że amplitudy składowych harmonicznych ζ_n zanikają co najmniej jak $1/n$.

W zastosowaniach często posługujemy się pochodnymi procesu stochastycznego, które też są procesami stochastycznymi. Z różniczkowania wzoru (18) względem czasu wynika, że amplituda n-tej składowej harmonicznej pochodnej procesu stochastycznego wynosi $n\omega_0\zeta_n$. Stąd wariancja pochodnej procesu stochastycznego wyrazi się wzorem:

$$\sigma_{\dot\zeta}^2 = \Sigma½(n\omega_0)^2\zeta_n^2. \tag{20}$$

Gdy okresowość procesu T wydłuża się, krok występowania kolejnych składowych $\omega_0 = 2\pi/T$ maleje. W granicy, dla procesu stochastycznego, którego okresowość T jest nieskończenie duża, krok $\Delta\omega = \omega_0 \to 0$. Liczba składowych harmonicznych rośnie nieskończenie w przedziale częstości o znaczącej energii, a ponieważ energia jest skończona, stąd energia pojedynczych składowych zmierza do zera. W takim przypadku wygodnie jest posługiwać się *gęstością energii*, czyli stosunkiem $\frac{1}{2}\zeta_n^2/\Delta\omega$, oznaczanym przez $S(\omega_n)$. Przy tych założeniach twierdzenie Parsevala możemy przekształcić następująco:

$$\sigma^2 = \sum \tfrac{1}{2}\varsigma_n^2 = \sum \frac{\frac{1}{2}\varsigma_n^2}{\Delta\omega}\Delta\omega = \sum S(\omega_n)\Delta\omega .$$

W granicy $S(\omega_n)$ przechodzi w $S(\omega)$, a suma w całkę. Stąd twierdzenie Parsevala przyjmie postać całkową:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty S(\omega)d\omega,$$

gdzie $S(\omega)$ jest *funkcją gęstości (widmowej) procesu* lub krótko – *widmem procesu*; wymiarem jest m^2s. Funkcja ta przedstawia rozkład energii procesu względem częstości składowych harmonicznych, której pole równa się wariancji, czyli energii procesu. Widmo podaje pełną charakterystykę procesu. Z jego pomocą można określić cały szereg użytecznych charakterystyk.

Widmo procesu rozciąga się teoretycznie do nieskończoności, co wynika z własności szeregów Fouriera. Wykażemy, że momenty dowolnego rzędu widma procesu powinny być skończone. Momenty te, oznaczane przez m_n, dane są wzorem:

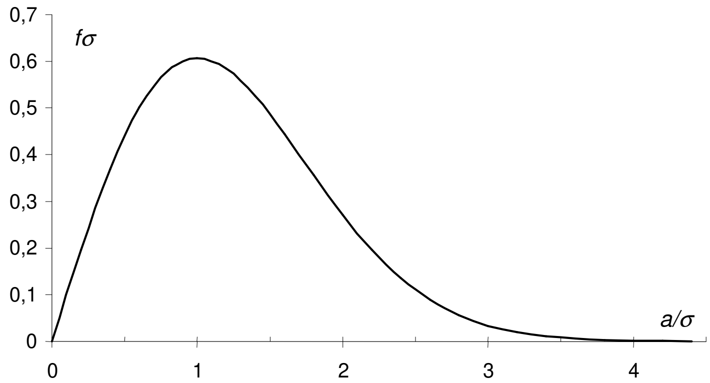
$$m_n = \int_0^\infty \omega^n S(\omega)d\omega, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

W nomenklaturze momentów wariancja falowania $\sigma^2 = m_0$ jest momentem zerowego rzędu, czyli polem pod widmem. Aby momenty dowolnego rzędu istniały, „ogon” widma musi zanikać wykładniczo.

Ze wzoru (20) wynika, że widmo energii pochodnej procesu stochastycznego równa się $\omega^2 S(\omega)$. Łatwo znaleźć, że dla drugiej pochodnej procesu widmo wynosi $\omega^4 S(\omega)$ itd. Stąd wariancja pochodnej procesu $\sigma_{\xi}^2 = m_2$ jest momentem drugiego rzędu widma, wariancja drugiej pochodnej jest momentem czwartego rzędu m_4 itd. Ponieważ wariancje pochodnych są skończone, skończone muszą być też momenty widma dowolnych rzędów.

Znajomość wariancji określa rozkład odchyleń od położenia równowagi, który jest rozkładem normalnym (rys. 21), jak i rozkład *amplitud* (wartości szczytowych, ekstremalnych) procesu (rys. 22), który jest *rozkładem Rayleigha*:

$$F(a) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2} \tag{22}$$



Rys. 22. Rozkład Rayleigha bezwymiarowych amplitud procesu

gdzie $\sigma = \sigma_\zeta$ jest standardowym odchyleniem procesu. Zatem prawdopodobieństwo $P_a \equiv P(\zeta_{max} > a)$ przewyższenia poziomu a określa wzór:

$$P_a = 1 - F(a) = \exp[-½(a/\sigma)^2], \tag{23}$$

zależny jedynie od bezwymiarowego poziomu a/σ. Różniczkując dystrybuantę (22) względem a, otrzymamy gęstość prawdopodobieństwa amplitud:

$$f(a) = (a/\sigma^2)\exp[-½(a/\sigma)^2],$$

pokazaną na rys. 22. Rozkład bezwymiarowych rzędnych procesu (rys. 21) czy bezwymiarowych amplitud (rys. 22) są rozkładami *uniwersalnymi*, ważnymi dla każdego stanu morza.

Znalezienie wariancji procesu dla danego stanu morza nazywa się prognozą krótkoterminową. W oparciu o rozkład Rayleigha łatwo jest obliczyć amplitudę a (czy poziom a) przekraczany z prawdopodobieństwem $p\%$; mówimy też o amplitudzie (poziomie) a z zabezpieczeniem $p\%$, co zapisujemy $a_{p\%}$. Wielkość $a_{p\%}$ nazywa się też kwantylą $p\%$; jest to inaczej funkcja odwrotna do dystrybuanty czy ogona dystrybuanty $1 - F$. Podstawiając we wzorze (23) $P_a = p\%$, otrzymamy:

$$a_{p\%} = (2\ln {}^1\!/_{p\%})^{1/2}\,\sigma. \tag{24}$$

Często używa się amplitudy czy poziomu z zabezpieczeniem 3% lub 1%, tj. poziomu, który jest przekraczany średnio trzy razy lub jeden raz na 100 oscylacji. Ze wzoru (24) otrzymamy: $a_{3\%} = 2{,}65\sigma$, zaś $a_{1\%} = 3{,}035\sigma$. Aby otrzymać wysokość oscylacji (zakres zmian) z odpowiednim zabezpieczeniem, odpowiadającą amplitudę mnożymy przez 2. Wyznaczanie wariancji procesu oparte jest na założeniu, że:

- falowanie morskie jest superpozycją nieskończonej liczby fal regularnych, których funkcja gęstości widmowej $S(\omega)$ jest znana;

- statek jest obiektem liniowym;
- proces jest także superpozycją nieskończonej liczby składowych harmonicznych.

W zagadnieniach liniowych składowe te można znaleźć z ominięciem analizy harmonicznej procesu, na podstawie znajomości amplitud składowych harmonicznych falowania i charakterystyki amplitudowej procesu $|\boldsymbol{Y}| \equiv Y = Y(\omega, v, \beta)$, zależnej od stanu morza, prędkości statku i kąta kursowego względem falowania.

Wariancja procesu, jakim są np. oscylacje naprężeń, jest sumą przyczynków od poszczególnych składowych harmonicznych procesu:

$$\sigma^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} s_j^2 = \Sigma \tfrac{1}{2}(Y_j \zeta_0)^2 = \Sigma Y_j^2 \tfrac{1}{2} \zeta_0^2,$$

(dla skrócenia indeks sumowania jest opuszczony). Dzieląc i mnożąc przez $d\omega$, a następnie całkując względem ω, otrzymamy wyrażenia całkowe na wariancję procesu:

$$\sigma^2 = \int Y^2(\omega) S(\omega) d\omega, \tag{25}$$

dla zadanego stanu morza, prędkości v i kąta kursowego β statku względem falowania. Oblicza się je numerycznie. Warto zauważyć, że widmo procesu jest inne, niż widmo falowania. Tym samym okresy procesu są inne, niż okresy falowania. Jest to istotna różnica w stosunku do fali regularnej, gdzie częstość odpowiedzi pokrywa się z częstością fali.

Widmo falowania $S(\omega) \sim H_s^2$ jest proporcjonalne do kwadratu znaczącej wysokości fali. Stąd ze wzoru (25) natychmiast wynika, że na różnych stanach morza wariacja $\sigma^2 \sim H_s^2$ jest proporcjonalna do kwadratu znaczącej wysokości fali, jeśli niezmieniona jest prędkość statku i kąt kursowy względem fali. Umożliwia to proste szacowanie wariancji, bez konieczności ponownego stosowania wzoru (25).

Ze wzoru (25) widać, że wariancja procesu σ^2 zależy od charakterystyki amplitudowej $Y(\omega) = Y_j(\omega, v, \beta)$ oraz stanu morza $S(\omega)$ opisanego widmem falowania. Tak więc mają na nią wpływ:

- warunki zewnętrzne opisane znaczącą wysokością fali H_s, okresem charakterystycznym T_1 oraz głównym kierunkiem falowania;
- prędkość i kąt kursowy statku;
- stan załadowania statku opisany wypornością, współrzędnymi środka ciężkości i tensorem bezwładności.

§ 9. Związek prognozy długoterminowej z krótkoterminową

Statek pływa na różnych stanach morza. Stąd interesuje nas rozkład amplitud procesu w całym okresie eksploatacji statku. Rozkład amplitud (wartości szczytowych) procesu dla całego okresu eksploatacji nazywa się p r o g n o z ą d ł u g o t e r m i n o w ą. Otrzymuje się ją uśredniając prognozy krótkoterminowe, tj. rozkłady amplitud Rayleigha względem częstości występowania stanów morza.

Prognoza długoterminowa jest bardzo pracochłonna. Dla każdego przypadku *ijkl* musimy bowiem znajdować wariancję procesu, co samo w sobie jest pracochłonne. Powstaje pytanie, czy nie można tego samego wyniku osiągnąć z pomocą prognozy krótkoterminowej, wykonanej dla najbardziej niekorzystnego stanu morza. Zbadamy teraz tę możliwość. W tym celu skorzystajmy z relacji opartej na rozszerzaniu ułamka:

$$a_{LT} = \frac{a_{LT}}{a_{ST}} \frac{a_{ST}}{\sigma} \sigma \tag{26}$$

gdzie a_{LT} jest prognozą długoterminową amplitudy procesu stochastycznego z zabezpieczeniem 10^{-8}, czyli kwantylą 10^{-8}, a_{ST} jest prognozą krótkoterminową amplitudy procesu stochastycznego z tym samym zabezpieczeniem dla najbardziej niekorzystnego (zwykle najwyższego) stanu morza, z uwzględnieniem różnych kątów kursowych, czyli uśrednionej względem kątów kursowych, zaś σ jest standardowym odchyleniem falowania najwyższego stanu morza, równym $\sigma = ¼H_s$.

Stosunek kwantyli prognozy długoterminowej i krótkoterminowej $a_{LT}/a_{ST} < 1$ jest mniejszy od 1. Jeśli waga (udział) najwyższych stanów morza jest w granicach $11 \div 17\%$, to wartość tego stosunku słabo zależy od rozkładu stanów morza i – dla przewyższenia na poziomie 10^{-8} – zawiera się w bardzo wąskim przedziale $0{,}94 \div 0{,}95$. Stosunek a_{LT}/a_{ST} jest więc praktycznie stały [5].

Przyjmując, że stosunek kwantyli prognozy długo- i krótkoterminowej dla najbardziej niekorzystnego stanu morza a_{LT}/a_{ST} jest praktycznie stały i wynosi w przybliżeniu 0,944, ze wzoru (26) natychmiast wynika prosty związek pomiędzy prognozą długo- i krótkoterminową: $a_{LT} = 0{,}944\,a_{ST}$. Wzór ten daje możliwość znacznego uproszczenia obliczeń z uwagi na stałą relację między obydwoma typami prognozy procesu stochastycznego. Prognozę długoterminową możemy bowiem uzyskać za pomocą nieporównanie mniej pracochłonnej prognozy krótkoterminowej dla najbardziej niekorzystnego stanu morza.

Drugi w kolejności stosunek a_{ST}/σ, występujący we wzorze (26), jest rodzajem funkcji przenoszenia dla prognozy krótkoterminowej dla najbardziej niekorzystnego stanu morza, o najbardziej niekorzystnym okresie charakterystycznym fali. Wprowadzając oznaczenie $Y_{ST} \equiv a_{ST}/\sigma$, wzór (26) przyjmie postać:

$$a_{LT} = 0{,}944\, Y_{ST} ¼ H_s.$$

Znając prognozę długoterminową, pozwala on wyznaczyć znaczącą wysokość falowania najbardziej niekorzystnego stanu morza (ang. *survival storm*), zwykle o największej znaczącej wysokości fali, mianowicie: $H_s = 4{,}24\, a_{LT}/Y_{ST}$.

Powstaje pytanie, czy zabezpieczenie na poziomie 10^{-8} jest wystarczające. Odpowiedź otrzymamy z poniższego równania na oszacowanie prognozy krótkoterminowej:

$$\exp[-½(a/\sigma)^2] = 10^{-8},$$

z którego wynika, że $a_{ST}/\sigma = 4(\ln 10)^{1/2} = 6{,}070$, gdzie σ jest średnim odchyleniem standardowym procesu stochastycznego (z uwzględnieniem różnych kątów kursowych) na najgorszym stanie morza. Stąd mamy: $a_{LT} \approx 0{,}944 \cdot 6{,}07\sigma \approx 5{,}7\sigma$. Wartość ta jest na więcej niż zadawalającym poziomie.

Stosunek kwantyli prognozy długoterminowej i krótkoterminowej nie jest stały, gdy waga w najwyższego stanu morza zmienia się w szerokich granicach. Stosunek ten w praktyce nie zależy od rozkładu stanów morza, a jedynie od wagi występowania najwyższego stanu morza w. W tab. 4 podane jest oszacowanie stosunku kwantyli dla realistycznego rozkładu stanów morza, jakie występują na Północnym Atlantyku.

Tab. 4. Oszacowanie stosunku prognozy długoterminowej do krótkoterminowej dla rzeczywistego rozkładu stanów morza

1	2	3	4	5	6
	$a/\sigma =$	6,0697	$a/\sigma =$	4,127	0,680
H_s (m)	waga w	P_a	wP_a	P_a	wP_a
< 2,5	0,257	0	0	0	0
2,5	0,238	0	0	0	0
3,5	0,191	0	0	6,36E–83	1,2E–83
4,5	0,133	0	0	1,89E–50	2,5E–51
5,5	0,083	1,00E–72	5,50E–72	5,17E–34	4,3E–35
6,5	0,048	2,82E–52	1,83E–51	1,47E–24	7,1E–26
7,5	0,026	1,91E–39	1,43E–38	1,26E–18	3,3E–20
8,5	0,013	7,16E–31	1,43E–38	1,16E–14	1,5E–16
9,5	0,006	7,36E–25	2,86E–38	6,97E–12	4,2E–14
10,5	0,0025	1,76E–20	5,72E–38	7,36E–10	1,8E–12
11,5	0,00105	3,40E–17	1,14E–37	2,43E–08	2,6E–11
12,5	0,00075	1,15E–14	2,29E–37	3,60E–07	2,7E–10
13,5	0,00035	1,12E–12	4,57E–37	2,99E–06	1E–09
14,5	0,00020	4,37E–11	9,15E–37	1,63E–05	3,3E–09
15,5	0,00010	8,60E–10	1,82E–36	6,44E–05	6,4E–09
16,5	0,00005	1,00E–08	3,62E–36	2,00E–04	1E–08
	1,00000		3,63E–36		1,00E–08

Jak widać, w tym przykładzie stosunek $a_{LT}/a_{ST} = 0{,}680$. Prawdopodobieństwa przekroczenia zadanych poziomów wg prognozy długoterminowej, podane w dole kolumny 4 i 6 w tab. 4, zależą praktycznie od wkładu (przyczynku) ze strony najwyższego (najgorszego) stanu morza, gdy przyczynki pochodzące od niższych stanów morza są znikomo małe. Stąd wynika proste równanie na oszacowanie prognozy długoterminowej:

$$w \exp[-\tfrac{1}{2}(a_{LT}/\sigma)^2] = 10^{-8},$$

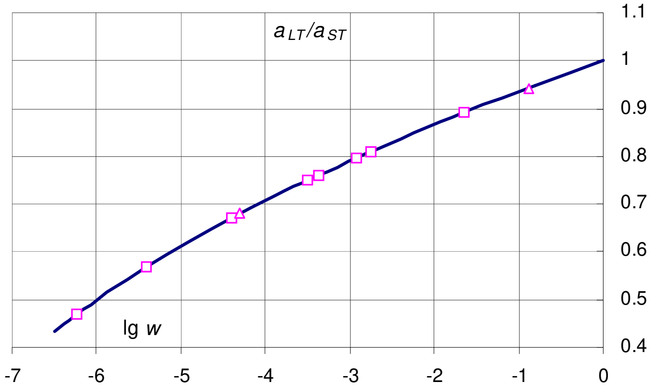
gdzie w jest częstością występowania najwyższego stanu morza (*survival storm*). Rozwiązaniem tego równania jest:

$$a_{LT}/\sigma = (16\ln 10 + 2\ln w)^{1/2}.$$

Dla $w = 0{,}13$, otrzymamy $a_{LT}/\sigma = 5{,}7237$; jest to wartość różniąca się dopiero na czwartym miejscu dziesiętnym od oszacowanej w [5], a dla $w = 0{,}00005$, otrzymamy: $a_{LT}/\sigma = 4{,}127$, czyli tyle, co w tab. 4. Widzimy więc, że na stosunek kwantyli prognozy długo- i krótkoterminowej a_{LT}/a_{ST} zasadniczy wpływ ma udział najwyższego stanu morza. Dzieląc a_{LT}/σ przez $a_{ST}/\sigma = 4(\ln 10)^{1/2}$, otrzymamy:

$$\frac{a_{LT}}{a_{ST}} = \sqrt{1+\tfrac{1}{8}\frac{\ln w}{\ln 10}} = \sqrt{1+\tfrac{1}{8}\lg w}\,, \tag{27}$$

gdzie w jest wagą występowania najwyższego (najgorszego) stanu morza. Dla $w = 0{,}13$, wzór (27) daje $a_{LT}/a_{ST} = 0{,}943$, czyli tyle, co w [5], a dla $w = 0{,}00005$, $a_{LT}/a_{ST} = 0{,}680$, czyli tyle, co w tab. 4. Wykres stosunku tych dwóch prognoz w zależności od $\lg w$ pokazany jest na rys. 23. Kwadratami zaznaczono wyniki obliczeń komputerowych [6] wykonanych w PRS, trójkątami – wyniki z pracy [5] i tab. 4, a linia ciągła jest krzywą wg wzoru (27).



Rys. 23. Stosunek kwantyli 10^{-8} prognozy długo- i krótkoterminowej

Jak widać, zgodność wzoru (27) z wynikami obliczeń jest bardzo wysoka. Dowodzi to, że prognoza długoterminowa może być zrealizowana w oparciu o prognozę krótkoterminową. Stosunek tych dwóch prognoz zależy wyłącznie od częstości występowania najwyższego stanu morza.

Prognoza krótkoterminowa, uśredniona po kątach kursowych względem fali, dotyczy kwantyli na poziomie 10^{-8}. Bywa, że prognoza krótkoterminowa jest wykonywana na poziomie 10^{-4}, a nie 10^{-8}, co wynika z długości trwania pojedynczego sztormu. W takim przypadku łatwo pokazać, że pomiędzy tymi prognozami zachodzi związek:

$$\frac{a_{ST10^{-8}}}{a_{ST10^{-4}}} = \sqrt{\frac{-8\ln 10}{-4\ln 10}} = \sqrt{2}\,,$$

to znaczy, na danym stanie morza kwantyla z zabezpieczeniem 10^{-8} jest $\sqrt{2}$ razy większa niż kwantyla z zabezpieczeniem 10^{-4}.

Związek pomiędzy prognozą długo- i krótkoterminową, dany wzorem (27), został otrzymany przy założeniu, że rozkład amplitud dla ustalonego stanu morza dany jest rozkładem Rayleigha. Założenie jest prawdziwe, gdy dodatkowo ustalony jest kąt kursowy względem fali. Jeśli prognozę krótkoterminową będziemy uśredniali względem kątów kursowych, to rozkład amplitud przestaje być rozkładem Rayleigha przechodząc w *rozkład Weibulla*. Dystrybuanta tego rozkładu dana jest wzorem $F = 1 - \exp[-(^a/_\sigma)^\beta]$, gdzie σ i β to pewne stałe; ta ostatnia nazywa się parametrem kształtu. Przyjmując, że rozkład amplitud jest rozkładem Weibulla, równania na kwantyle przyjmą postać:

$$\exp[-(a_{ST}/\sigma)^\beta] = 10^{-8},$$
$$w\exp[-(a_{LT}/\sigma)^\beta] = 10^{-8}.$$

Eliminując stałą σ, otrzymamy wzór bardzo podobny do wzoru (27):

$$\frac{a_{LT}}{a_{ST}} = \left(1+\tfrac{1}{8}\lg w\right)^{1/\beta}, \tag{28}$$

w którym pierwiastek kwadratowy przechodzi w pierwiastek stopnia β. Tak więc oprócz częstości występowania najgorszych stanów morza w, wpływ na stosunek prognoz ma także parametr kształtu β, związany z rozkładem Weibulla prognozy długoterminowej.

§ 10. Zginanie kadłuba. Oscylacje nieharmoniczne

Statek na fali „pracuje”, tzn. na grzbiecie fali kadłub w y g i n a się, a w dolinie – u g i n a się. Naprężenia wywołane zginaniem kadłuba nie są jednak naprzemienne, tzn. inne są w ugięciu, a inne w wygięciu. Należy pamiętać, że kadłub statku jest rusztem, utworzonym z usztywnień wzdłużnych i poprzecznych pokrytych poszyciem. Podczas jednego półcyklu, w obszarze, gdzie konstrukcja jest ściskana, płyty poszycia ulegają wyboczeniu, przenoszą więc mniejsze naprężenia, niż w przypadku sztywnych płyt, w związku z czym oś obojętna przesuwa się w kierunku obszaru, gdzie jest rozciąganie.

Zatem podczas zginania kadłuba oś obojętna nie jest stała, lecz oscyluje *skokowo* wokół geometrycznej (nominalnej) osi obojętnej, która jest stała. Zakres zmian naprężeń Δσ w elemencie jest stały podczas zginania (Δσ = *const*), tym niemniej oscylacje nie są harmoniczne (amplituda części dodatniej cyklu jest mniejsza, niż części ujemnej). Z tego powodu zagadnienie wytrzymałości zmęczeniowej statku na fali jest zagadnieniem nieliniowym, do którego – ściśle rzecz biorąc – nie można stosować zasady superpozycji, czyli składania przyczynków pochodzących od poszczególnych składowych harmonicznych falowania nieregularnego.

W literaturze nie ma odpowiedzi na pytanie, jak nieharmoniczne oscylacje w elementach konstrukcji okrętowych wpływają na zmęczenie. Najprościej przyjąć założenie, że nie wpływają, jeśli przyjąć średnią amplitudę oscylacji naprężeń $\sigma_a = ½\Delta\sigma$, co tym samym linearyzuje zagadnienie. Tłumaczyłoby to, dlaczego w okrętownictwie operuje się zakresem naprężeń $\Delta\sigma$, a nie amplitudą oscylacji σ_a, bo ta – ściśle rzecz biorąc – jest zmienna.

W obliczeniach wytrzymałości zmęczeniowej całkowicie pomija się wyboczenie płyt poszycia kadłuba podczas ściskania. Przy takim podejściu, amplituda oscylacji naprężeń w węzłach konstrukcji statku jest stała. Umożliwia to wyznaczanie charakterystyki amplitudowej procesu $|\mathbf{Y}| \equiv Y = Y(\omega, v, \beta)$, potrzebnej we wzorze (25), za pomocą obliczeń komputerowych dla kadłuba sztywnego, jak też za pomocą badań modelowych. Tymczasem w przepisach PRS [2] podana jest procedura korekty zakresu naprężeń $\Delta\sigma$ ze względu na wartość naprężeń ściskającyh w cyklu obciążenia, co jest mocno wątpliwe. Krzywe Wöhlera podają bowiem efekt makroskopowy zmęczenia, bez wchodzenia w efekty mikroskopowe, związane z rozwojem mikropęknięć.

§ 11. Rozkład Weibulla

Długoterminowy rozkład amplitud oscylacji naprężeń wyraża się rozkładem Weibulla. Dystrybuanta tego rozkładu dana jest wzorem:

$$F = 1 - \exp[-(s/c)^{\beta}], \tag{29}$$

gdzie c i β to stałe. Dla skrócenia zapisu, $s \equiv \sigma_a$ jest losową amplitudą naprężeń w całym okresie eksploatacji statku.

Iloraz s/c jest bezwymiarową amplitudą oscylacji. Parametr c ma więc wymiar naprężenia. Parametr ten wpływa na rozciągłość rozkładu, bez zmiany jego kształtu. O kształcie rozkładu decyduje parametr β. Jest on wielkością bezwymiarową z przedziału $\langle 0{,}8,\ 1{,}2\rangle$. Ustala się go wg wymagań przepisów towarzystw klasyfikacyjnych. Im smuklejszy kadłub i większa prędkość eksploatacyjna statku, tym większe β. Obydwa parametry można uzyskać z aproksymacji histogramu amplitud, występujących w przyjętym okresie eksploatacji statku za pomocą fgp rozkładu Weibulla.

Parametr rozciągłości rozkładu c można powiązać z dowolną kwantylą s_R, przekraczaną z prawdopodobieństwem $1/N_R$, czyli kwantylą z zabezpieczeniem $1/N_R$. Zatem:

$$1 - F = 1/N_R,$$

stąd:

$$\exp[-(s_R/c)^{\beta}] = 1/N_R.$$

Logarytmując stronami, otrzymamy:

$$-(s_R/c)^{\beta} = -\ln N_R,$$
$$s_R/c = (\ln N_R)^{1/\beta},$$

stąd:

$$c = s_R/(\ln N_R)^{1/\beta}. \tag{30}$$

Gdy znamy dystrybuantę, jest to najłatwiejszy sposób znajdowania parametru c. Dla $N_R = 10^4$, otrzymamy:

$$c = s_{10^{-4}}/(4\ln 10)^{1/\beta}.$$

Gdy $N_R = 2$, otrzymamy:

$$c = s_{0,5}/(\ln 2)^{1/\beta}.$$

Stała $s_{0,5}$ nazywa się *medianą*. Jest to taka wartość zmiennej losowej, która przekraczana jest z prawdopodobieństwem ½.

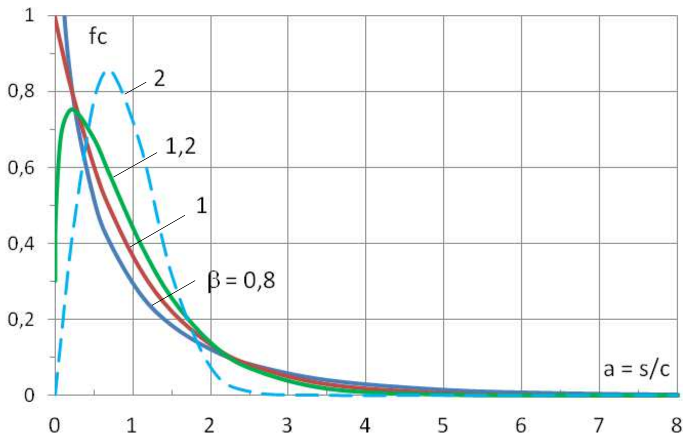
Wprowadzając oznaczenie $a = s/c$ na bezwymiarową amplitudę oscylacji naprężeń, dystrybuanta bezwymiarowej amplitudy wyraża się wzorem:

$$F = 1 - \exp(-a^{\beta}), \tag{31}$$

co wynika ze wzoru (29). Różniczkując ten wzór względem zmiennej a, otrzymamy funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa:

$$f(a) = \beta a^{\beta-1}\exp(-a^{\beta}). \tag{32}$$

Wykres tego rozkładu pokazany jest na rys. 24.



Rys. 24. Rozkład Weibulla bezwymiarowych amplitud procesu w całym okresu eksploatacji statku

Dla $\beta < 1$ rozkłady Weibulla monotonicznie opadają, oś rzędnych jest wówczas asymptotą pionową. Dla $\beta = 1$ rozkład staje się rozkładem wykładniczym, a dla $\beta = 2$ – rozkładem Rayleigha. Gdy $\beta > 1$, maksimum rozkładu występuje w punkcie:

$$a = (1 - 1/\beta)^{1/\beta}.$$

Dla $\beta = 1{,}2$ jest w punkcie $a = 0{,}225$ i wynosi 0,754 (rys. 24), a dla $\beta = 2$ – w punkcie $a = 0{,}707$ i wynosi 0,858.

Jak widać, rozkład Weibulla, choć jest uśrednionym rozkładem amplitud względem kierunku falowania, to jednak znacznie różni się od rozkładu Rayleigha (β = 2), pokazanym także na rys. 22.

Znając rozkład gęstości (32), możemy znaleźć wartość średnią bezwymiarowych amplitud oraz wariancję. W tym celu obliczmy najpierw momenty dowolnego stopnia n:

$$m_n \equiv \int_0^\infty a^n f(a)da = \int_0^\infty a^n \beta a^{\beta-1} \exp(-a^\beta)da.$$

Całkę tę można obliczyć, stosując podstawienie $t = a^\beta$. Stąd $a = t^{1/\beta}$. Obie zmienne zmieniają się więc monotonicznie od 0 do ∞. Różniczka $da = (1/\beta)t^{1/\beta-1}dt$. Zatem:

$$m_n \equiv \int_0^\infty t^{n/\beta} \beta t^{(\beta-1)/\beta} \exp(-t)(1/\beta)t^{1/\beta-1}dt = \int_0^\infty t^{n/\beta} \exp(-t)dt.$$

W efekcie otrzymaliśmy znaną całkę typu:

$$\int_0^\infty t^x \exp(-t)dt = \Gamma(1+x), \tag{33}$$

która definiuje funkcją gamma. Całkując przez części, można pokazać, że:

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x).$$

Dla x równego 0 i 1, całki te równe są 1. Zważywszy, że $\Gamma(1) = 1$, ze wzoru rekurencyjnego wynika, że $\Gamma(1+n) = n!$ dla wszystkich liczb naturalnych, łącznie z zerem.

Zatem momenty rozkładu bezwymiarowych amplitud wyrażają się wzorem:

$$m_n \equiv \int_0^\infty t^{n/\beta} \exp(-t)dt = \Gamma(1+n/\beta).$$

Wartość średnia $\overline{a} = m_1$. Zatem:

$$\overline{a} = \Gamma(1+1/\beta).$$

Wariancja, czyli średni kwadrat, równa się $\overline{a^2} = m_2 - m_1^2$ (wzór jest niczym innym, jak twierdzeniem Steinera; pole A nie występuje, bo jest równe 1). Zatem:

$$\overline{a^2} = \Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta).$$

Standardowe odchylenie $\sigma = (\overline{a^2})^{1/2}$ jest pierwiastkiem wariancji.

W zastosowaniach bywa potrzebna także *niezupełna* funkcja gamma:

$$\int_s^\infty t^x \exp(-t)dt.$$

Funkcje gamma zupełna i niezupełna są funkcjami specjalnymi. Ich wartości można znaleźć za pomocą tablic lub programów komputerowych, np. dostępnych w Internecie, jak na przykład https://pl.numberempire.com/definiteintegralcalculator.php. Wystarczy wpisać funkcję podcałkową, podać granice całkowania, by otrzymać (momentalnie) wynik o dużej dokładności. Strona ta obejmuje też kalkulator funkcji gamma.

Co do tablicowania, z uwagi na wzór rekurencyjny, funkcję gamma wystarczy stablicować dla $x \in \langle 0, 1\rangle$. Przykładowo, gdy $x = 3{,}2$, całka (33) równa się $\Gamma(4{,}2)$. Stosując wzór rekurencyjny, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\Gamma(4{,}2) &= 3{,}2\cdot 2{,}2\cdot 1{,}2\cdot\Gamma(1{,}2) = 8{,}448\cdot\Gamma(1{,}2)\\ &= 8{,}448\cdot 0{,}918169 = 7{,}75669.\end{aligned}$$

Wartość $\Gamma(1{,}2)$ bierzemy z tablic lub obliczamy za pomocą kalkulatora internetowego. Ten sam wynik otrzymamy z kalkulatora internetowego dla $x = 3{,}2$ w całce (33).

Podobnie dla niezupełnej funkcji gamma istnieje wzór rekurencyjny:

$$\int_s^\infty t^x \exp(-t)dt = s^x e^{-s} + x\int_s^\infty t^{x-1}\exp(-t)dt.$$

Wynika on z całkowania przez części. Widzimy, że operacja ta obniża o 1 wykładnik x w całce (33). Z tego powodu niezupełną funkcję gamma wystarczy stablicować dla $x \in \langle 0, 1\rangle$ i $s > 0$. Przykładowo dla $x = 3{,}2$ i $s = 0{,}5$, stosując wzór rekurencyjny, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^\infty t^{3,2}\exp(-t)dt &= e^{-0,5}(0{,}5^{3,2} + 3{,}2\cdot 0{,}5^{2,2} + 3{,}2\cdot 2{,}2\cdot 0{,}5^{1,2}) +\\ &+ 3{,}2\cdot 2{,}2\cdot 1{,}2\cdot\int_{0,5}^\infty t^{0,2}\exp(-t)dt =\\ &= 2{,}34703 + 8{,}448\int_{0,5}^\infty t^{0,2}\exp(-t)dt\\ &= 2{,}34703 + 8{,}448\cdot 0{,}63932 = 7{,}74801.\end{aligned}$$

Wartość $\Gamma(1{,}2; 0{,}5)$ bierzemy z tablic lub obliczamy za pomocą kalkulatora internetowego. Ten sam wynik otrzymamy z kalkulatora internetowego.

§ 12. Wyznaczanie stopnia zużycia zmęczeniowego *D*

Stopień zużycia zmęczeniowego D dany jest wzorem (16). Do wykonania obliczeń potrzebna jest funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu amplitud $f(s)$. Otrzymamy ją różniczkując wzór (29) względem amplitudy s lub dzieląc wzór (32) przez parametr c. Otrzymamy:

$$f(s) = {}^{\beta}/_{c}\,({}^{s}/_{c})^{\beta-1}\exp[-({}^{s}/_{c})^{\beta}]. \tag{34}$$

Względna częstość występowania amplitud s_i w przedziale Δs_i wynosi $f(s_i)\Delta s_i$. Mnożąc względną częstość przez liczbę oscylacji podczas całej eksploatacji statku N_L (20 lub 25 lat) otrzymamy n_i – liczbę oscylacji z amplitudą s_i. Zatem:

$$n_i = f(s_i)\Delta s_i\cdot N_L.$$

Z kolei liczba oscylacji N_i niszcząca próbkę, odczytana z krzywej Wöhlera dla amplitudy s_i, dana jest wzorem (12). Tak więc wzór (16) przyjmie postać:

$$D = \frac{N_L}{N_0} \sum f(s_i) \Delta s_i \left(\frac{s_i}{Z} \right)^m, \tag{35}$$

gdzie $m = 5$ lub 3, gdy $s_i < Z$, $m = 3$, gdy $s_i > Z$, zaś $Z = ½\Delta\sigma_0$ jest równe połowie zakresu naprężeń w punkcie załamania $N = N_0$ krzywych Wöhlera (rys. 15 lub rys. 17).

Stopień zużycia zmęczeniowego D można określać z pomocą wzoru (35), przeprowadzając sumowanie po wszystkich przedziałach Δs_i z odpowiednią potęgą m, w zależności od relacji s_i względem Z.

Ze wzoru (35) natychmiast wynika, że gdy okres eksploatacji statku wynosi 25 lat, liczba oscylacji wynosi $N_L \approx 10^8$, stopień zużycia zmęczeniowego będzie prawie dziesięciokrotnie większy, niezależnie od typu aproksymacji krzywych Wöhlera, bowiem rozkłady amplitud dla różnych okresów eksploatacji są prawie takie same.

Gdy przedziały sumowania $\Delta s_i \to 0$, suma (35) przechodzi w całkę:

$$D = \frac{N_L}{N_0} \int_0^{R_m} \left(\frac{s}{Z} \right)^m f(s) ds, \tag{36}$$

gdzie całkowanie odbywa się od amplitudy $s = 0$ do R_m – granicy wytrzymałości doraźnej. Granica wytrzymałości zmęczeniowej $Z = Z(\sigma_m)$ jest stałą w tym wzorze, zależną od naprężeń śrenich σ_m; podana jest na wykresie Haigha (rys. 9). Ze względu na zmienność wykładnika m w punkcie $s = Z$, całkowanie we wzorze (36) odbywa się przedziałami: od $s = 0$ do Z z wykładnikiem $m = 5$ oraz od Z do R_m z wykładnikiem $m = 3$.

Wzór (36) pokazuje, że stopień zużycia zmęczeniowego D jest sumą dwóch wielkości proporcjonalnych do niezupełnych momentów trzeciego i piątego stopnia funkcji gęstości prawdopodobieństwa długoterminowego rozkładu amplitud $f(s)$. Ponieważ rozkład ten największe wartości ma dla małych i średnich amplitud (rys. 24), dlatego umiarkowane oscylacje, jakie powstają podczas falowania o małych i średnich intensywnościach, mają największy udział w degradacji zmęczeniowej kadłubów statków.

Ze wzoru (36) wynika nadto, że ze wzrostem granicy wytrzymałości zmęczeniowej Z istotnie zmniejsza się stopień zużycia zmęczeniowego D. Wielkość tę, zależną od naprężeń średnich σ_m, określa wykres Haigha (rys. 9). Ze wzrostem σ_m amplituda graniczna Z maleje, co intensyfikuje degradację zmęczeniową kadłuba statku.

Podstawiając za funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu amplitud $f(s)$ funkcję daną wzorem (34), otrzymamy:

$$D = \frac{N_L}{N_0} \frac{\beta}{c} \int_0^{R_m} \left(\frac{s}{Z} \right)^m \left(\frac{s}{c} \right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{s}{c} \right)^{\beta} \right] ds$$

W ilorazie s/Z możemy dokonać rozszerzenia przez c/c. Wyłączając stałą c/Z przed całkę, wzór przyjmie postać:

$$D = \frac{N_L}{N_0}\frac{\beta}{c}\left(\frac{c}{Z}\right)^m \int_0^{R_m} \left(\frac{s}{c}\right)^m \left(\frac{s}{c}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{s}{c}\right)^\beta\right] ds\,,$$

stąd:

$$D = \frac{N_L}{N_0}\frac{\beta}{c}\left(\frac{c}{Z}\right)^m \int_0^{R_m} \left(\frac{s}{c}\right)^{m+\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{s}{c}\right)^\beta\right] ds \qquad (37)$$

Stosując podstawienie $t = (s/c)^\beta$, mamy:

$s/c = t^{1/\beta}$,
$ds = (c/\beta)\, t^{1/\beta - 1} dt$.

Podstawiając do wzoru (37), otrzymamy znaną całkę związaną z funkcją gamma o wykładniku $x = 1 + m/\beta$:

$$D = \frac{N_L}{N_0}\left(\frac{c}{Z}\right)^m \int_0^{(R_m/c)^\beta} t^{m/\beta} e^{-t} dt\,, \qquad (38)$$

gdzie β i c są parametrami związanymi z rozkładem Weibulla, zaś Z jest amplitudą oscylacji naprężeń w punkcie załamania na krzywej Wöhlera (rys. 15 lub rys. 17). Można przyjąć, że górna granica całkowania $(R_m/c)^\beta$ jest nieskończenie duża. Wzór (38) przyjmie więc postać:

$$D = \frac{N_L}{N_0}\left[\left(\frac{c}{Z}\right)^5 \int_0^{(Z/c)^\beta} t^{5/\beta} e^{-t} dt + \left(\frac{c}{Z}\right)^3 \int_{(Z/c)^\beta}^{\infty} t^{3/\beta} e^{-t} dt\right] \qquad (39)$$

Obydwie całki we wzorze (39) to niezupełne funkcje gamma. Obliczanie ich zostało omówione w § 11. Wzór ten różni się od analogicznego wzoru podanego w przepisach [2] i skrypcie [3]. Pierwsza z nich stanowi przyczynek niskoamplitudowy D_1:

$$D_1 = \frac{N_L}{N_0}\left(\frac{c}{Z}\right)^5 \int_0^{(Z/c)^\beta} t^{5/\beta} e^{-t} dt\,,$$

a druga – przyczynek wysokoamplitudowy D_2:

$$D_2 = \frac{N_L}{N_0}\left(\frac{c}{Z}\right)^3 \int_{(Z/c)^\beta}^{\infty} t^{3/\beta} e^{-t} dt$$

Granica wytrzymałości zmęczeniowej $Z = Z(\sigma_m)$ zależy od średniego poziomu naprężeń σ_m. Naprężenia te są tożsame z naprężeniami, jakie występują na wodzie spokojnej, które z kolei zależą od stanu zładowania statku. Wielkość Z odczytujemy z wykresu Haigha (rys. 9). Stąd dla każdego węzła konstrukcyjnego, obok krzywej Wöhlera winien być podany wykres Haigha.

Na uwagę zasługuje jeszcze stała N_0, czyli liczba oscylacji na końcu krzywej Wöhlera, w punkcie załamania krzywych, tj. na styku z asymptotą poziomą. Obecnie przyjmuje się, że w punkcie załamania krzywych stała $N_0 = 10^7$, niezależnie od wartości średniej naprężeń σ_m. Rys. 9 sugeruje, że stała ta winna liniowo maleć z modułem naprężeń średnich σ_m wg wzoru:

$$N_0 = 10^7\left(1 - \left|\frac{\sigma_m}{R_m}\right|\right) \tag{40}$$

od wartości $N_0 = 10^7$ dla $\sigma_m = 0$, do $N_0 = 0$ dla $|\sigma_m| = R_m$.

Pomijanie wpływu naprężeń średnich na granicę wytrzymałości zmęczeniowej Z czy liczbę oscylacji N_0 w punkcie załamania krzywych Wöhlera prowadzi do zaniżania stopnia zużycia zmęczeniowego konstrukcji, co widać ze wzoru (38).

W przypadku, gdy parametr $\beta = 1$, niezupełne funkcje gamma można obliczyć ściśle. Stosując sukcesywnie całkowanie przez części otrzymamy:

$$\int_0^x t^5 e^{-t} dt = 120 - e^{-x}(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) \tag{41}$$

$$\int_x^\infty t^3 e^{-t} dt = e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \tag{42}$$

gdzie $x = Z/c$.

Gdy wykładnik jednomianu nie jest liczbą całkowitą, niezupełnej funkcji gamma nie da się obliczyć ściśle, musimy więc obliczać ją numeryczne, np. za pomocą kalkulatora internetowego. Kalkulator ten jest na tyle efektywny, że nie opłaca się stosować wzorów rekurencyjnych, jak poniżej:

$$\int_x^\infty t^{3,4} e^{-t} dt = e^{-x}(x^{3,4} + 3{,}4 \cdot x^{2,4} + 3{,}4 \cdot 2{,}4 \cdot x^{1,4}) + \ 3{,}4 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}4 \int_x^\infty t^{0,4} e^{-t} dt.$$

§ 13. Przykład obliczeniowy

Dla ilustracji przeprowadzonych rozważań, obliczymy stopień zużycia zmęczeniowego D dla krzywej Wöhlera typu „D" dla rozkładu amplitud opisanego parametrami: $\beta = 1$, $N_R = 10^8$, $s_R = 150$ MPa. Liczba oscylacji w całym okresie eksploatacji statku $N_L = 5 \cdot 10^7$.

Rozwiązanie. Najpierw określimy rozciągłość c rozkładu Weibulla. Korzystając ze wzoru (30), otrzymamy:

$$c = s_R/(\ln N_R)^{1/\beta} = 150 \text{ MPa}/(\ln 10^8) = 8{,}143 \text{ MPa}.$$

Korzystając z tab. 3, określimy amplitudę oscylacji w punkcie załamania $N_0 = 10^7$ cykli:

$$s_0 = 53{,}4 \text{ MPa}/2 = 26{,}7 \text{ MPa}.$$

Jest to jednocześnie granica wytrzymałości zmęczeniowej Z dla $\sigma_m = 0$. Zatem:

$c/Z = 8{,}143/26{,}7 = 1/3{,}279.$

Punkt sklejenia funkcji podcałkowej we wzorze (39) wynosi:

$Z/c = 26{,}7/8{,}143 = 3{,}279.$

Przyczynek niskoamplitudowy zużycia zmęczeniowego D_1 obliczymy ze wzoru (39):

$$D_1 = \frac{5 \cdot 10^7}{10^7} \left(\frac{1}{3{,}279} \right)^5 \int_0^{3{,}279} t^5 \exp(-t) dt$$

Współczynnik przed całką $5/3{,}279^5 = 0{,}01319$. Natomiast całka – niezupełna funkcja gamma – obliczona za pomocą kalkulatora internetowego w § 11 czy wzoru (41), wynosi 13,7533. Stąd przyczynek D_1 wynosi:

$D_1 = 0{,}01319 \cdot 13{,}7533 = 0{,}18141.$

Przyczynek wysokoamplitudowy zużycia zmęczeniowego D_2 obliczymy ze wzoru (39):

$$D_2 = 5 \left(\frac{1}{3{,}279} \right)^3 \int_{3{,}279}^{\infty} t^3 \exp(-t) dt$$

Współczynnik przed całką $5/3{,}279^3 = 0{,}14182$. Natomiast całka – niezupełna funkcja gamma – obliczona za pomocą kalkulatora internetowego czy wzoru (42), wynosi 3,5099. Stąd przyczynek D_2 wynosi:

$D_2 = 0{,}14182 \cdot 3{,}5099 = 0{,}49777.$

Zatem stopień zużycia zmęczeniowego D równa się sumie przyczynków D_1 i D_2:

$D = 0{,}18141 + 0{,}49777 = 0{,}6792.$

Dla tych samych danych w [3] uzyskano wynik $D = 0{,}6807$.

Dla krzywych Wöhlera wg IIW stopień zużycia zmęczeniowego dany jest także wzorem (39), gdzie amplituda oscylacji Z w punkcie załamania $N_0 = 5 \cdot 10^6$ na rys. 17 jest o 26% większa od amplitudy oscylacji w poprzednim przypadku. Zatem punkt sklejenia funkcji podcałkowej we wzorze (39) wynosi:

$Z/c = 1{,}21 \ 3{,}279 = 5{,}607.$

Przyczynek niskoamplitudowy zużycia zmęczeniowego D_1 obliczymy ze wzoru (39):

$$D_1 = \frac{5 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^6} \left(\frac{1}{5{,}607} \right)^5 \int_0^{5{,}607} t^5 \exp(-t) dt$$

Współczynnik przed całką $10/5{,}607^5 = 0{,}0018045$. Natomiast całka obliczona za pomocą kalkulatora internetowego czy wzoru (41) wynosi 58,7192. Stąd:

$$D_1 = 0{,}0018045 \cdot 58{,}77192 = 0{,}10596.$$

Przyczynek wysokoamplitudowy zużycia zmęczeniowego D_2 obliczymy ze wzoru (39):

$$D_2 = 10\left(\frac{1}{5{,}607}\right)^3 \int_{5{,}607}^{\infty} t^3 \exp(-t)dt$$

Współczynnik przed całką $10/5{,}607^3 = 0{,}056729$. Natomiast całka obliczona za pomocą kalkulatora internetowego czy wzoru (42) wynosi 1,1392. Stąd:

$$D_2 = 0{,}028365 \cdot 1{,}1392 = 0{,}06463.$$

Stopień zużycia zmęczeniowego D równa się sumie przyczynków D_1 i D_2:

$$D = 0{,}10596 + 0{,}06463 = 0{,}17059.$$

Uzyskany wynik jest prawie cztery razy mniejszy od wyniku wg HSE. Przykład ten pokazuje, że stopień zużycia zmęczeniowego jest niezmiernie czuły na granicę zmęczeniową Z. Wzrost Z jest korzystny dla wytrzymałości zmęczeniowej, co powinno być oczywiste. Wartość Z wg IIW jest o 26% większa w stosunku do Z wg HSE, a stopień zużycia zmęczeniowego przy tych samych danych spadł aż czterokrotnie, o 74,9%. Krzywe Wöhlera na rys. 15 i rys. 17 różnią się nieznacznie między sobą jedynie punktem załamania, a jednak ma to znaczny wpływ na wyniki obliczeń zużycia zmęczeniowego D.

Sprawdźmy jeszcze, jak zmieniłoby się zużycie zmęczeniowe w pierwszym przypadku, gdyby granica wytrzymałości zmęczeniowej Z spadła o 10% pod wpływem naprężeń średnich σ_m na wodzie spokojnej.

R o z w i ą z a n i e. Naprężenia średnie (na wodzie spokojnej) nie mają wpływu na rozkład amplitud naprężeń. Tym samym nie zmieni się rozciągłość rozkładu c. Zatem punkt sklejenia funkcji podcałkowej we wzorze (39) wynosi:

$$Z/c = 0{,}9\ 3{,}279 = 2{,}9511.$$

Przyczynek niskoamplitudowy zużycia zmęczeniowego D_1 przyjmie postać:

$$D_1 = 5\left(\frac{1}{2{,}9511}\right)^5 \int_{0}^{2{,}9511} t^5 \exp(-t)dt$$

Współczynnik przed całką $5/2{,}9511^5 = 0{,}02234$. Natomiast całka, obliczona za pomocą kalkulatora internetowego czy wzoru (41), wynosi 9,4882. Stąd przyczynek D_1 wynosi:

$$D_1 = 0{,}02234 \cdot 9{,}4882 = 0{,}21195.$$

Przyczynek wysokoamplitudowy zużycia zmęczeniowego D_2 przyjmie postać:

$$D_2 = 5\left(\frac{1}{2{,}9511}\right)^3 \int_{2{,}9511}^{\infty} t^3 \exp(-t)dt$$

Współczynnik przed całką $5/2{,}9511^3 = 0{,}19454$, a całka, obliczona za pomocą kalkulatora internetowego czy wzoru (42), równa się 3,9491. Stąd przyczynek D_2 wynosi:

$$D_2 = 0{,}19454 \cdot 3{,}9491 = 0{,}76827.$$

Zatem stopień zużycia zmęczeniowego D równa się sumie przyczynków D_1 i D_2:

$$D = 0{,}21195 + 0{,}76827 = 0{,}9802.$$

Stopień zużycia zmęczeniowego wynosi teraz $D = 0{,}980$, gdy poprzednio wynosił 0,679. Zatem spadek granicy zmęczenia o 10% spowodował wzrost zużycia zmęczeniowego aż o 44%. Pomijanie wpływu naprężeń średnich σ_m daje więc przesadnie optymistyczne oszacowanie stopnia zużycia zmęczeniowego węzłów konstrukcyjnych statku. Zużycie zmęczeniowe dalej by wzrosło, gdyby uwzględnić spadek stałej N_0.

§ 14. Podsumowanie

Zużycie zmęczeniowe D jest nadzwyczaj czułe na granicę zmęczenia Z, a tym samym – na położenie punktu załamania na wykresach Wöhlera. Zmiana punktu załamania z $N_0 = 10^7$ na $5 \cdot 10^6$ daje wzrost granicy zmęczenia Z w punkcie załamania o 26%. Skutkuje to aż czterokrotnym zmniejszeniem stopnia zużycia zmęczeniowego D. Pokazuje to, że obliczenia wytrzymałości zmęczeniowej mają jedynie charakter szacunkowy.

Model obliczeniowy w przepisach PRS [2] pomija wpływ naprężeń średnich σ_m na stopień zużycia zmęczeniowego D. Z uwagi na dużą czułość stopnia zużycia zmęczeniowego D na granicę zmęczenia Z oraz liczbę oscylacji N_0 w punkcie załamania krzywych Wöhlera, prowadzi to do znacznego zaniżania wartości D, co widać ze wzoru (38). Inaczej mówiąc, stopień zużycia zmęczeniowego D jest znacznie wyższy, niż wynika to z obliczeń klasyfikacyjnych.

Nie ma problemów, by tę charakterystykę obliczać z uwzględnieniem naprężeń średnich σ_m, jakie panują na wodzie spokojnej. Granica wytrzymałości zmęczeniowej Z zależy od nich, a te z kolei zależą od stanu załadowania statku. Wielkość Z odczytujemy z wykresu Haigha dla zadanego σ_m (rys. 9). Stąd dla każdego węzła konstrukcyjnego, obok wykresu Wöhlera, uzupełnionego o wytrzymałość doraźną R_m i granicę plastyczności R_e, powinien być podany wykres Haigha. Do jego wykreślenia wystarczy znajomość granicy zmęczenia Z dla oscylacji symetrycznych i pulsujących. Podobnie nie ma problemu z określaniem stałej N_0 wg wzoru (40) w zależności od naprężeń średnich σ_m. Wytrzymałość doraźna obcina wykresy Wöhlera na poziomie R_m, a granica plastyczności rozgranicza wytrzymałość wysokocyklową od niskocyklowej.

Obliczanie stopnia zużycia zmęczeniowego w przepisach [2] jest nieprzejrzyste. Czytelnikowi trudno zorientować się, skąd pochodzą podane wzory. Najważniejsze, nie widać ich analitycznego charakteru. Zużycie zmęczeniowe D jest sumą dwóch niezupełnych funkcji gamma, danych wzorem (39), których obliczanie nie przedstawia trudności zwłaszcza, gdy obliczamy je z pomocą kalkulatora internetowego.

Zadania

1. Znaleźć linie $\sigma_{max} = const$ na wykresie Haigha.

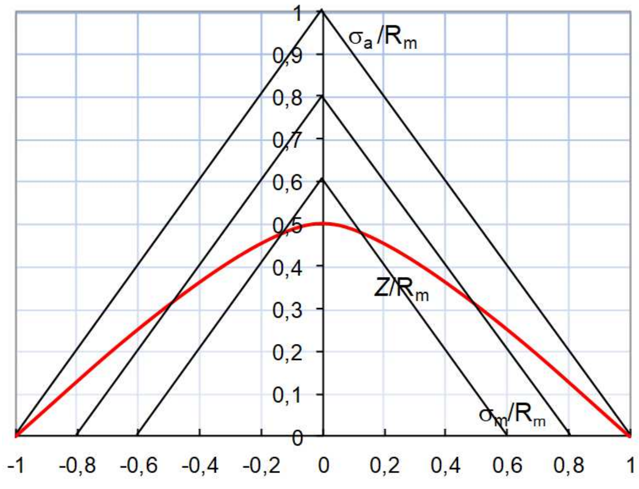
   R o z w i ą z a n i e. Oznaczny stałą wartość naprężeń makasymalmych σ_{max} przez R_c. Ponieważ $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$, stąd:

$$\sigma_m + \sigma_a = R_c$$
$$\sigma_a = R_c - \sigma_m.$$

Dzieląc to równanie przez wytrzymałość doraźną R_m, otrzymamy:

$$\sigma_a/R_m = R_c/R_m - \sigma_m/R_m.$$

Wykresem tego równania w układzie σ_m/R_m, σ_a/R_m jest linia prosta o współczynniku kierunkowym −1, przecinająca osie w punktach R_c/R_m. Dla wybranych wartości R_c/R_m = 1, 0,8, 0,6 linie te pokazane są na rys. 25.



Rys. 25. Linie stałych naprężeń σ_{max} na wykresie Haigha

W przypadku, gdy $\sigma_m < 0$, ekstremalna wartość co do modułu $\sigma_{max} = \sigma_m - \sigma_a$, stąd:

$$\sigma_m - \sigma_a = -R_c$$
$$\sigma_a = \sigma_m + R_c,$$

co prowadzi do równania:

$$\sigma_a/R_m = \sigma_m/R_m + R_c/R_m.$$

Wykresem tego równania są linie proste o współczynniku kierunkowym 1 (rys. 25).

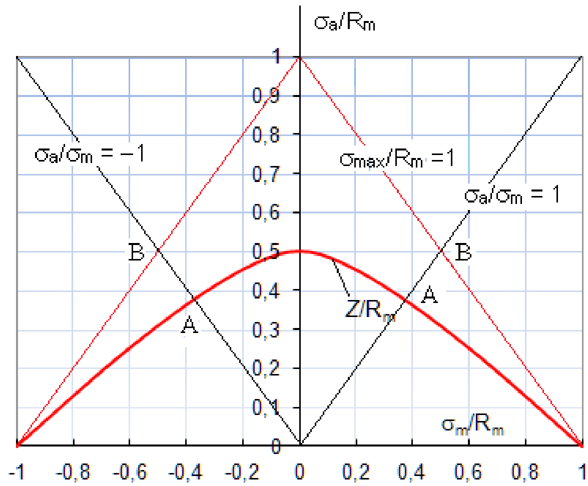
2. Znaleźć położenie oscylacji pulsujących na wykresie Haigha.
   R o z w i ą z a n i e. W przypadku oscylacji pulsujących:

$\sigma_a = \sigma_m$, gdy pulsacje są rozciągające,
$\sigma_a = -\sigma_m$, gdy pulsacje są ściskające.

Tak więc:

$\sigma_a/\sigma_m = 1$, gdy pulsacje są rozciągające,
$\sigma_a/\sigma_m = -1$, gdy pulsacje są ściskające.

Zatem maksymalne oscylacje pulsujące o nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej znajdują się w punkcie *A* przecięcia się prostych o nachyleniu ±1, wychodzących z początku układu współrzędnych, z krzywą Z/R_m (rys. 26).



Rys. 26. Linie oscylacji pulsujących na wykresie Haigha

Gdy zakres naprężeń oscylacji pulsujących zmienia się, odpowiadający im punkt wędruje po prostych o nachyleniu ±1. Amplituda oscylacji pulsujących dla ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej zmienia od punktu *A* przecięcia się z krzywą Z/R_m, do punktu *B* przecięcia się z linią naprężeń maksymalnych. W przypadku oscylacji pulsujących wraz ze zmianą amplitudy σ_a zmienia się także średni poziom oscylacji σ_m o tę samą wartość, co amplituda.

3. Znaleźć amplitudę niszczącą $A \equiv \sigma_{a1}$ dla $N = 1$ dla krzywej typu D (tab. 3).

R o z w i ą z a n i e. Amplituda niszcząca A dla $N = 1$ dana jest wzorem:

$$A = ZN_0^{1/m}.$$

Dane dla krzywej typu D są następujące: $N_0 = 10^7$, $m = 3$, $\Delta\sigma_0 = 53{,}4$ MPa, $Z = \frac{1}{2}\Delta\sigma_0 = 26{,}7$ MPa. Stąd:

$$A = 26{,}7 \text{ MPa}\cdot(10^7)^{1/3} = 5752{,}34 \text{ MPa}.$$

Jest to wartość wielokrotnie większa od wytrzymałośći doraźnej R_m, co wskazuje, iż aproksymacja jednomianowa wykresów Wöhlera jest ważna tylko w ograniczonym przedziale od punktu końcowego krzywej. Z tego powodu na wykresach Wöhlera winien być zaznaczony poziom wytrzymałości doraźnej R_m.

Literatura

1. *Integralność konstrukcji*, wykład nr 4: Metoda naprężenia nominalnego, Akademia Górniczo-Hutnicza (AGH), Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji, http://zwmik.imir.agh.edu.pl/dydaktyka/dla_studentow/imir/imir.html.
2. *Analiza wytrzymałości zmęczeniowej stalowego kadłuba statku*, Polski Rejestr Statków, Publikacja nr 45/P, 2005, https://www.prs.pl/uploads/p45p_pl.pdf.
3. Bogdaniuk M. *Wytrzymałość zmęczeniowa konstrukcji okrętowych*, Materiały dla studentów, Politechnika Gdańska, Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa, Gdańsk 2008.
4. Pawłowski M. *Falowanie morskie*, Raport Techniczny nr 49, PRS, 2005, ss. 46.
5. Pawłowski M. *Hydromechanika ogólna i okrętowa*, w maszynopisie.
6. Górski J. *Obciążenia falowe determinujące wytrzymałość wiązań kadłuba statku*, praca doktorska, Politechnika Gdańska, Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa, Gdańsk 2004, ss. 125.

MACIEJ PAWŁOWSKI

Doktor habilitowany. Absolwent wydziału okrętowego Politechniki Gdańskiej (1970). W latach 1970-2010 zatrudniony na Politechnice Gdańskiej, jako nauczyciel akademicki. Wykładał hydromechanikę ogólną i okrętową, statykę okrętu, mechanikę techniczną, wytrzymałość materiałów, matematykę stosowaną. Wypromował 10 doktorów. W pracy badawczej koncentrował się na bezpieczeństwie statku po kolizji, gdzie zyskał międzynarodowe uznanie. Odbył staże zagraniczne (w sumie 7 lat) na uniwersytetach w Newcastle upon Tyne, Glasgow, Strathclyde i Lyngby, związane z tą tematyką. W latach 1983-1998 aktywnie uczestniczył w obradach Podkomitetu IMO ds. SLF (stateczności, linii ładunkowych i bezpieczeństwa statków rybackich). Współtwórca przepisów niezatapialności w konwencji SOLAS. W 1995 roku, podczas pobytu w Glasgow, odkrył mechanizm przewracania się na fali statków ro-ro po utracie integralności burty, co dało podstawy metodzie statycznej równoważności SEM (static equivalent method), umożliwiającej przewidywanie przewracania się promu na fali z dokładnością nie gorszą, niż badania modelowe czy symulacje numeryczne. Współpracował z Centrum Techniki Okrętowej oraz Polskim Rejestrem Statków. Publikował w wielu renomowanych czasopismach, jak Transactions SNAME, Journal of Ship Research, Marine Technology and SNAME News, The Naval Architects, i innych. Autor książki Subdivision and damage stability of ships (2004) nt. niezatapialności okrętu w ujęciu probabilistycznym, pierwszej na świecie, współtwórca tej dziedziny wiedzy.

Nakładem Wydawnictwa GSW ukazały się:

1. *Podstawy mechaniki*, Gdańsk 2016, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-89762-83-2, https://tiny.pl/r4jhn
2. *Podstawy mechaniki. Uzupełnienia*, wyd. online (PDF), Gdańsk 2019, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-66270-00-8, https://tiny.pl/t44dt
3. *Analiza stanu naprężeń. Skrypt dla studentów*, wydanie online (PDF), Gdańsk 2018, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-89762--51-1, https://tiny.pl/r4jq7

WYDANIE ONLINE PDF

9 788366 270190

ISBN 978-83-66270-19-0
Wydawnictwo GSW · 2021
www.gsw.gda.pl/wydawnictwo
Nr katalogowy: [119]

GSW
GDAŃSKA SZKOŁA WYŻSZA