

Maciej Pawłowski

CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

$$\int_a^b y(x) dx = h \sum_{i=0}^n H_i y_i + \Delta$$

ZABRANIONE

- samowolne udostępnianie publiczne całości lub/i fragmentów
- sprzedaż kopii w wersjach: cyfrowej i wydruku

DOZWOLONE

- pobieranie i wydruk

Dostępne publicznie pod adresem:

<https://gsw.gda.pl/content/calowanie-numeryczne>

Redakcja, projekt strony tytułowej
Tomasz Mikołajczewski

Wydanie drugie, online (PDF), Gdańsk 2022

© Copyright by Gdańska Szkoła Wyższa, Gdańsk 2020-2022



Wydawnictwo GSW

Gdańska Szkoła Wyższa
80-875 Gdańsk, ul. Biskupia 24B
tel. 58 305 08 11, tel. 58 305 08 12
Zamówienia: wydawnictwo@gsw.gda.pl

www.gsw.gda.pl/wydawnictwo

ISBN online 978-83-66270-23-7 Nr katalogowy [123]

Nie napisałbym § 23 o całkowaniu za pomocą krzywych giętkowych, gdyby w arkana mechaniki konstrukcji nie wprowadził mnie Witold Kurski, rocznik 1933, nauczyciel akademicki, konstruktor, promotor mojej pracy magisterskiej, nagrodzonej w konkursie na najlepsze prace dyplomowe Trójmiasta (1970 rok)

SPIS TREŚCI

CAŁKOWANIE NUMERYCZNE	7
§ 1. Wstęp	8
§ 2. Metoda Lagrange'a	9
§ 3. Rozwijanie w szereg	15
§ 4. Wzory najwyższej dokładności	24
§ 5. Całkowanie funkcji regularnych	28
§ 6. Wzory Newtona-Cotesa	32
§ 7. Wzór trapezów	37
§ 8. Wzór Simpsona	40
§ 9. Zwiększenie dokładności obliczeń	43
§ 10. Metoda Romberga	47
§ 11. Wzory 5–8	51
§ 12. Uogólniony wzór paraboliczny	55
§ 13. Obliczanie krzywych całkowych	57
§ 14. Wzory Czebyszewa	60
§ 15. Metoda prostokątów	68
§ 16. Wzory Gaussa	72
§ 17. Całkowanie w bazie Czebyszewa	79
§ 18. Metoda interpolacji Czebyszewa	86
§ 19. Całkowanie funkcji osobliwych metodą Gaussa	91
a) Wzory Czebyszewa I	91
b) Wzory Czebyszewa II	97
c) Wzory z wagą $[x/(1-x)]^{1/2}$	102
d) Wzory z wagą $(1-x)^{1/2}$	106
e) Wzory z wagą $(1-x)^{-1/2}$	110
§ 20. Całkowanie w przedziale nieskończonym	114
a) Wzory Laguerre'a	114
b) Wzory Hermite'a	117
SPECJALNE METODY CAŁKOWANIA	123
§ 21. Całkowanie tłumionych funkcji okresowych	124
§ 22. Planimetr	130
§ 23. Krzywe giętkowe	133
a) Interpolacja trójpunktowa	133
b) Analiza ugięcia giętki	140
c) Interpolacja wielopunktowa	144

§ 24.	Obliczanie całek z ominięciem funkcji pierwotnej.....	147
a)	Sprowadzanie do całki zależnej od parametru.....	148
b)	Podnoszenie całki do kwadratu	149
c)	Sprowadzanie do równania.....	150
d)	Całki Froullaniego	150
§ 25.	Całkowanie jednomianu tłumionego	155
DODATEK MATEMATYCZNY		167
§ 26.	Własności wielomianów Legendre'a	168
§ 27.	Własności wielomianów Laguerre'a	173
§ 28.	Własności wielomianów Hermite'a	177
§ 29.	Tożsamości przydatne w zastosowaniach.....	182
a)	Definicje	182
b)	Tożsamości trygonometryczne przydatne w całkowaniu	182
c)	Użyteczne rozwinięcia.....	182
d)	Momenty funkcji sinus i kosinus	183
Literatura		185

STRESZCZENIE

Skrypt obejmuje całą gamę metod numerycznego obliczania całek oznaczonych, opartych na znajomości rzędnych funkcji podcałkowej w zadanych punktach. Są to metody równokrokowe Newtona-Cotesa, jak wzór trapezów, Simpsona i inne, wzory Czebyszewa o stałych mnożnikach rzędnych czy wzory Gaussa o najwyższych rzędach dokładności. Omówiono sposoby zwiększania dokładności obliczeń, w tym metodę Romberga, polegającą na połowieniu kroku całkowania, zapewniającą zazwyczaj dużo dokładniejsze wyniki, niż wzory Newtona-Cotesa. Omówiono metodę prostokątów, dokładniejszą od metody trapezów, dającą błąd dwukrotnie mniejszy przeciwnego znaku. Omówiono całkowanie funkcji nieregularnych (osobliwych) z wagą.

Skrypt omawia także specjalne metody całkowania, jak całkowanie funkcji okresowych o zmiennej amplitudzie, całkowanie za pomocą planimetru czy krzywych giętkowych, zwykle pomijane w literaturze. Wreszcie, na koniec omówiono ściśle obliczanie niektórych całek z ominięciem funkcji pierwotnej.

CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

§ 1. Wstęp

W zastosowaniach często zachodzi konieczność obliczania całek oznaczonych:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Przez *całkę oznaczoną* rozumie się granicę, do której dąży suma pól pasków $f(x_i)\Delta x_i$ pokrywających przedział całkowania $\langle a, b \rangle$, gdy ich liczba $n \rightarrow \infty$, a szerokość $\Delta x_i \rightarrow 0$. Sumowanie odbywa się po wszystkich paskach od $i = 0$ do n . Interpretacją geometryczną całki oznaczonej jest więc różnica pola między krzywą $f(x)$ i osią odciętych, które jest nad i pod osią x .

Funkcja podcałkowa $f(x)$ może być dana w trojaki sposób:

- tabelarycznie,
- wykreślnie,
- analitycznie (wzorem).

Tylko w trzecim przypadku, gdy funkcja podcałkowa dana jest wzorem, może istnieć możliwość obliczenia całki oznaczonej za pomocą metod analitycznych, tj. przez zastosowanie wzoru Newtona-Leibniza:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b, \quad (1.1)$$

gdzie $F(x)$ jest *funkcją pierwotną* o skończonej kombinacji funkcji elementarnych. Inny sposób obliczania całek oznaczonych to *teoria residuum* czy rozwinięcie funkcji podcałkowej w szereg Maclaurina. We wszystkich pozostałych przypadkach całki oznaczone można obliczyć jedynie za pomocą całkowania numerycznego, co powinno być oczywiste. Warto zaznaczyć, że również w przypadku funkcji podcałkowych zadanych analitycznie opłaca się czasami obliczać całki numerycznie, gdy obliczenie analityczne jest zawile.

Całkowanie numeryczne polega na obliczaniu całki oznaczonej na podstawie wartości funkcji podcałkowej (rzędnych) dla wybranych odciętych. Zatem istota tego całkowania jest następująca:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n M_i y_i + \Delta, \quad (1.2)$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją podcałkową, $x_0, x_1, \dots, x_n$ są odciętymi, w których znane są wartości (rzędne) funkcji podcałkowej $y_0, y_1, \dots, y_n$, Δ jest błędem metody, zaś $M_0, M_1, \dots, M_n$ są współczynnikami wagowymi (mnożnikami) rzędnych; mają one wymiar, jak oś x .

Przez $n + 1$ rzędnych $y_0, y_1, \dots, y_n$, branych do obliczenia całki, można jednoznacznie poprowadzić wielomian interpolacyjny n -tego stopnia. Odcięte x_i tych rzędnych nazywają się *węzłami interpolacji*. Widzimy, że błąd metody Δ równa się zero, gdy wie-

lomian interpolacyjny pokrywa się z funkcją podcałkową. Tak więc dokładność całkowania numerycznego jest tym większa, im lepiej wielomian interpolacyjny aproksymuje funkcję podcałkową. Jeśli zatem funkcja podcałkowa znacznie różni się od wielomianu interpolacyjnego, np. gdy posiada asymptoty pionowe, to oczywiste jest, że błąd metody może być bardzo duży.

W przypadku funkcji regularnych najlepsze wyniki osiąga się stosując tzw. *całkowanie złożone*, polegające na całkowaniu funkcji krótkimi podprzedziałami i zastosowaniu w każdym podprzedziale wielomianów interpolacyjnych niskich stopni, czyli stosowaniu wzorów opartych na małej liczbie rzędnych. Jeśli długość przedziału jest zachowana, wzory na całkowanie numeryczne nie zależą od położenia przedziału.

W przypadku, gdy funkcja podcałkowa lub jej pochodna posiada osobliwość, a więc gdy znacznie różni się od wielomianu, należy przedstawić ją w postaci iloczynu funkcji osobliwej $\theta(x)$ i funkcji regularnej $g(x)$:

$$f(x) = \theta(x)g(x)$$

i przybliżać jedynie funkcję regularną. Postępowanie takie umożliwia osiągnięcie dużej dokładności całkowania numerycznego, mimo występowania osobliwości funkcji podcałkowej $f(x)$. Całkowanie wygląda wówczas następująco:

$$\int_a^b \theta(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^n M_i g(x_i) + \Delta . \quad (1.3)$$

Jest to najbardziej ogólny przypadek całkowania numerycznego. Funkcja $\theta(x)$ nazywa się funkcją wagową lub krócej – wagą.

W wielu przypadkach, gdy funkcja podcałkowa $f(x)$ jest regularna, nie ma potrzeby przyjmowania funkcji wagowej. Oznacza to, że wzór (1.2) jest szczególnym przypadkiem wzoru (1.3), w którym $\theta(x) \equiv 1$. Potrzeba całkowania wg wzoru (1.3) występuje również wtedy, gdy przedział całkowania $\langle a, b \rangle$ jest nieskończony, gdy funkcja $f(x)$ zawiera takie funkcje, jak $\sin Kx$, przy dużych K , $e^{\lambda x}$, przy małych λ itp.

§ 2. Metoda Lagrange'a

Ze wzorów (1.2) i (1.3) wynika, że całkę oznaczoną oblicza się numerycznie sumując $n + 1$ rzędnych funkcji $f(x)$ lub $g(x)$, niekoniecznie wziętych z przedziału całkowania, mnożonych przez odpowiednie mnożniki wagowe.

Mnożniki M_i (wagi) można wyznaczyć na wiele sposobów. Jednym z nich jest aproksymowanie funkcji regularnej $g(x)$ wielomianem interpolacyjnym $L_n(x)$ co najwyższej stopnia n , przyjmującym w danych węzłach x_i te same wartości, co funkcja $g(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x)g(x_i), \quad (2.1)$$

gdzie:

$$p_i(x) = \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x_i - x_k)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

są (bezwymiarowymi) wielomianami Lagrange'a stopnia n , związanymi z poszczególnymi węzłami; Π jest iloczynem, w którym k zmienia się od 0 do n , z wykluczeniem $k = i$. Inaczej mówiąc, mianownik jest iloczynem odległości i -tego węzła od pozostałych węzłów, zaś licznik jest iloczynem odległości x od tych samych węzłów. W węzłach:

$$p_i(x_k) = \delta_{ik} \equiv \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}.$$

Stąd łatwo jest sprawdzić, że $L_n(x_i) = g(x_i)$, czyli że $L_n(x)$ jest rzeczywiście wielomianem interpolacyjnym. Ze wzoru widać, że położenie węzłów wzdłuż osi x nie wpływa na wielomiany $p_i(x)$. Dla $n = 2$ otrzymuje się wzór na interpolację kwadratową:

$$g(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} g_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} g_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} g_2 \quad (2.3)$$

Wielomiany stojące przy g_0, g_1, g_2 są wielomianami Lagrange'a $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$. Z uwagi na to, że wielomian $p_i(x)$ w i -tym węźle przyjmuje wartość 1, a w pozostałych zeruje się, jego przebieg jest oscylacyjny poza własnym węzłem $x = x_i$, zwłaszcza dla większych n , co widać na rys. 1 dla $n = 4$. Węzły na tym rysunku są w punktach $x = 1, 2, 3, 4$ i 5. Wielomiany $p_i(x)$ mogą przekraczać wartość 1, jak na przykład wielomiany $p_1(x)$ i $p_3(x)$ na rys. 1. Widać też, że dla węzłów położonych symetrycznie w przedziale $\langle x_0, x_n \rangle$, wielomiany Lagrange'a są symetryczne względem środka przedziału $x = \frac{1}{2}(x_0 + x_n)$.

Poza węzłami wielomian interpolacyjny na ogół nie pokrywa się z funkcją $g(x)$, dlatego w dowolnym przypadku, interpolacja obarczona jest pewnym błędem (odchyłką) $\varepsilon(x)$, zwanym *błędem interpolacji*:

$$g(x) = L_n(x) + \varepsilon(x).$$

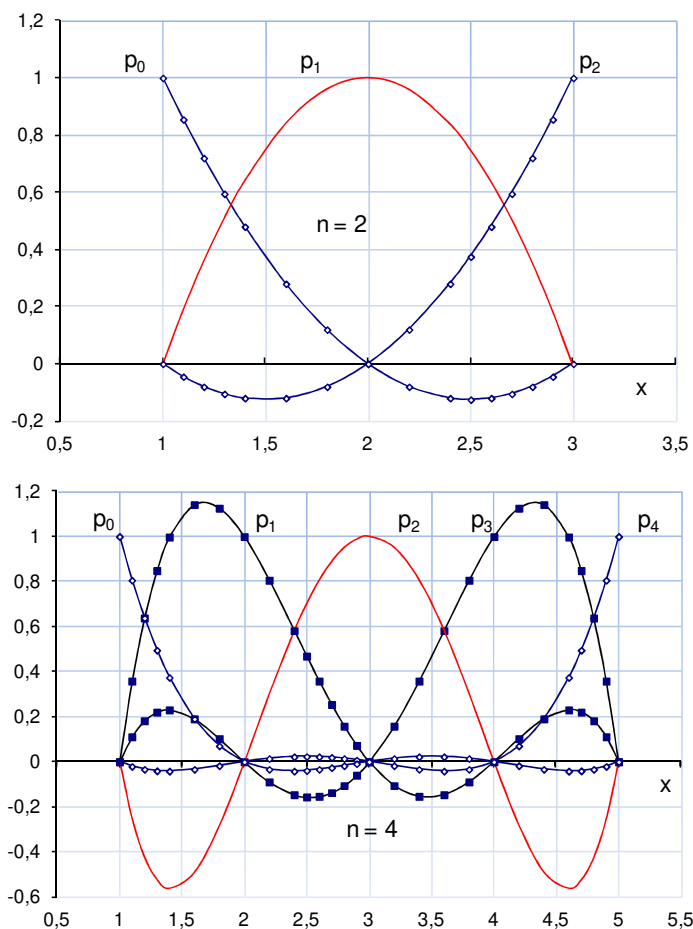
Podstawiając $g(x)$ do wzoru (1.3), otrzymamy:

$$M_i = \int_a^b \theta(x) p_i(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$\Delta = \int_a^b \theta(x) \varepsilon(x) dx. \quad (2.5)$$

Ze wzoru powyższego wynika, że idea znajdowania mnożników rzędnych M_i jest prosta, lecz w praktyce ma niewielkie znaczenie, ze względu na uciążliwe rachunki. Wynika to

stąd, że wielomiany Lagrange'a $p_i(x)$ są rozłożone na czynniki pierwsze, które w takiej postaci nie nadają się do całkowania. Całkować możemy jedynie wielomiany w postaci klasycznej. Aby je otrzymać, musimy wymnożyć czynniki pierwsze, co jest uciążliwe już dla $n \geq 4$. Stąd też, poza szczególnymi przypadkami omówionymi później, metoda Lagrange'a słabo nadaje się do wyznaczania mnożników.



Rys. 1. Wielomiany Lagrange'a dla $n = 2$ i 4

Ze wzoru (2.4) wynika, że gdy funkcja wagowa $\theta(x)$ jest symetryczna względem środka przedziału całkowania $\langle x_0, x_n \rangle$ i gdy węzły położone są symetrycznie względem tegoż środka, to odpowiadające im wielomiany Lagrange'a $p_i(x)$ są także symetryczne, co tym samym pociąga za sobą symetryczny przebieg mnożników M_i .

W przypadku funkcji regularnych, funkcja wagowa $\theta(x) \equiv 1$. Wzór (2.4) przyjmuje wówczas postać:

$$M_i = \int_a^b p_i(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Widzimy, że mnożniki rzędnych M_i równe są całce wielomianów Lagrange'a $p_i(x)$, danych wzorem (2.2), przy czym przedział całkowania nie musi pokrywać się ze skrajnymi węzłami. Gdy x liczone jest od środka przedziału, wówczas:

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} p_i(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

gdzie $h = b - a$ jest długością przedziału całkowania.

Wielomiany $p_i(x)$ nie zależą od położenia węzłów wzdłuż osi x . Możemy więc przesunąć je tak, by środek przedziału $1/2(a + b)$ znalazł się w początku układu. Przedział całkowania jest wtedy symetryczny.

Dzieląc licznik i mianownik wielomianu Lagrange'a (2.2) przez $(1/2h)^n$ (wielomiany $p_i(x)$ są stopnia n), otrzymamy:

$$p_i(x) = \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (t - t_k)}{\prod_{k=0, k \neq i}^n (t_i - t_k)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

gdzie $t \equiv x/1/2h$ jest bezwymiarową odległością od środka przedziału całkowania. Widzimy, że wielomiany $p_i(x)$ są tożsame z wielomianem $p_i(t)$. Podstawiając wielomiany (2.7) do wzoru (2.6), otrzymamy:

$$M_i = \frac{1}{2} h \int_{-1}^1 p_i(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

gdyż $dx = 1/2h dt$. Bezwymiarowe mnożniki $H_i \equiv M_i/h$ wyrażą się więc wzorem:

$$H_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_i(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Są one niezależne od długości przedziału całkowania h .

Wprowadźmy pomocniczy wielomian $s(x)$ stopnia $n + 1$, będący iloczynem kolejnych jednomianów $(x - x_i)$ od $i = 0$ do n :

$$s(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \Pi(x - x_i). \quad (2.9)$$

Wielomian Lagrange'a (2.2) można zapisać wtedy krócej:

$$p_i(x) = \frac{s(x)/(x - x_i)}{s'(x = x_i)}, \quad (2.10)$$

gdyż licznik we wzorze (2.2) nie zawiera czynnika $(x - x_i)$, a mianownik jest pochodną wielomianu $s(x)$ w punkcie $x = x_i$, co łatwo sprawdzić. Dzieliąc powyższy iloraz przez $(\frac{1}{2}h)^{n+1}$, otrzymamy:

$$p_i(x) = \frac{s(t)/(t - t_i)}{s'(t = t_i)}. \quad (2.11)$$

Jak poprzednio, wielomiany $p_i(x)$ są tożsame z wielomianami $p_i(t)$. Wzór ma sens, jeśli węzły są pierwiastkami z góry znanego wielomianu, co będzie omówione później. Jeśli nie, stosujemy wzór (2.7).

Uwaga: węzłów wzdłuż osi x nie można przesuwac, gdy funkcja podcałkowa jest osobiwa, tj. gdy występuje funkcja wagowa $\theta(x)$ – zmieniają się wówczas jej wartości.

PRZYKŁAD 1. Wyprowadzić wzór na całkowanie numeryczne w postaci:

$$\int_0^h y(x)dx = M_0 y_0 + M_1 y_1 + M_2 y_2,$$

w oparciu o interpolację kwadratową, gdzie rzędne y są w punktach $x = 0, \frac{1}{2}h, h$.

R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa jest regularna, $\theta(x) \equiv 1$. Korzystając ze wzoru na interpolację kwadratową (2.3), otrzymamy:

$$\int_0^h y(x)dx = y_0 \int_0^h \frac{(x - \frac{1}{2}h)(x - h)}{\frac{1}{2}h^2} dx + y_1 \int_0^h \frac{x(x - h)}{-\frac{1}{4}h^2} dx + y_2 \int_0^h \frac{x(x - \frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h^2} dx,$$

gdzie całki stojące przy rzędnych są mnożnikami M_i . Tak więc:

$$\begin{aligned} \int_0^h y(x)dx &= y_0 \int_0^h \frac{x^2 - \frac{3}{2}hx + \frac{1}{2}h^2}{\frac{1}{2}h^2} dx + y_1 \int_0^h \frac{x^2 - hx}{-\frac{1}{4}h^2} dx + y_2 \int_0^h \frac{x^2 - \frac{1}{2}hx}{\frac{1}{2}h^2} dx = \\ \int_0^h y(x)dx &= \frac{\frac{1}{3}h^3 - \frac{3}{4}h^3 + \frac{1}{2}h^3}{\frac{1}{2}h^2} y_0 + \frac{\frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{2}h^3}{-\frac{1}{4}h^2} y_1 + \frac{\frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^3}{\frac{1}{2}h^2} y_2 = \\ \int_0^h y(x)dx &= \frac{\frac{1}{12}h^3}{\frac{1}{2}h^2} y_0 + \frac{-\frac{1}{6}h^3}{-\frac{1}{4}h^2} y_1 + \frac{\frac{1}{12}h^3}{\frac{1}{2}h^2} y_2 = h\left(\frac{1}{6}y_0 + \frac{4}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2\right) = \\ &= \frac{2}{3}d\left(\frac{1}{2}y_0 + 2y_1 + \frac{1}{2}y_2\right). \end{aligned}$$

Wzór ten nazywa się wzorem *Simpsona*. Jest on ścisły nie tylko dla wielomianów kwadratowych, lecz także dla wielomianów trzeciego stopnia, co łatwo sprawdzić, całkując x^3 w przedziale $\langle 0, h \rangle$. Obydwa wzory: analityczny i numeryczny dadzą ten sam wynik: $\frac{1}{4}h^4$.

PRZYKŁAD 2. Wyprowadzić wzór na całkowanie numeryczne w postaci:

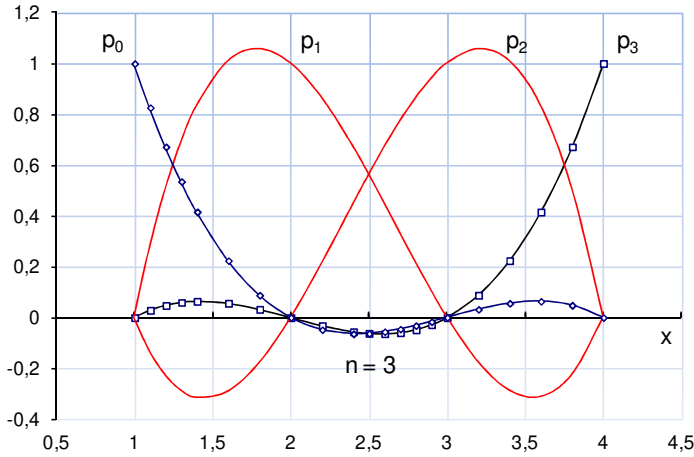
$$\int_0^h y(x)dx = M_0 y_0 + M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3,$$

w oparciu o interpolację trzeciego stopnia, gdzie rzędne y są w punktach $x = 0, \frac{1}{3}h, \frac{2}{3}h, h$.

R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa jest regularna, $\theta(x) \equiv 1$. Dla $n = 3$ wzór (2.2) na interpolację trzeciego stopnia przyjmie postać:

$$y = \frac{(x - \frac{1}{3}h)(x - \frac{2}{3}h)(x - h)}{-\frac{1}{3}h \cdot \frac{2}{3}h \cdot h} y_0 + \frac{x(x - \frac{2}{3}h)(x - h)}{\frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{3}h \cdot \frac{2}{3}h} y_1 + \frac{x(x - \frac{1}{3}h)(x - h)}{-\frac{2}{3}h \cdot \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{3}h} y_2 + \frac{x(x - \frac{1}{3}h)(x - \frac{2}{3}h)}{h \cdot \frac{2}{3}h \cdot \frac{1}{3}h} y_3$$

gdzie wyrażenia ułamkowe przy rzędnych są wielomianami Lagrange'a $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ i $p_3(x)$. Wielomiany te są symetryczne, co widać na rys. 2 (węzły na tym rysunku są w punktach $x = 1, 2, 3$ i 4). Wielomiany $p_0(x)$ i $p_3(x)$ w oddaleniu od swego węzła wyraźnie oscylują.



Rys. 2. Wielomiany Lagrange'a dla $n = 3$

Całkując wspomniane wielomiany w przedziale $\langle 0, h \rangle$, otrzymamy mnożniki M_i . Chcemy jednak otrzymać je bez przechodzenia na postać klasyczną wielomianów, bo wiąże się z tym dużo żmudnej pracy. Wielomiany Lagrange'a są trzeciego stopnia, możemy więc je scałkować numerycznie z pomocą wzoru Simpsona. W tym celu potrzebujemy wartości na końcach i w środku przedziału całkowania. Wartości te są następujące: dla

$$\begin{aligned} p_0(x): (1, -1/16, 0), & \quad p_1(x): (0, 9/16, 0), \\ p_2(x): (0, 9/16, 0), & \quad p_3(x): (0, -1/16, 1). \end{aligned}$$

Obliczając iloczyn skalarny z wektorem współczynników wzoru Simpsona, otrzymamy symetryczny przebieg mnożników: $M_0 = \frac{1}{8}h$, $M_1 = \frac{3}{8}h$, $M_2 = \frac{3}{8}h$, $M_3 = \frac{1}{8}h$. Zatem:

$$\int_0^h y(x)dx = h(\frac{1}{8}y_0 + \frac{3}{8}y_1 + \frac{3}{8}y_2 + \frac{1}{8}y_3).$$

Wzór ten nazywa się *II wzorem Simpsona*. Jak zobaczymy później, jest on zdecydowanie *mniej* dokładny, niż wzór Simpsona.

§ 3. Rozwijanie w szereg

Alternatywna metoda wyznaczania mnożników polega na rozwinięciu funkcji $g(x)$ w szereg Taylora:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)l + g''(x_0)\frac{l^2}{2} + \cdots + g^{(m)}(x_0)\frac{l^m}{m!} + g^{(m+1)}(\xi)\frac{l^{m+1}}{(m+1)!},$$

gdzie $l = x - x_0$. Rozwinięcie to można zapisać krócej:

$$g(x) = \sum_{k=0}^m g^{(k)}(x_0)\frac{l^k}{k!} + g^{(m+1)}(\xi)\frac{l^{m+1}}{(m+1)!},$$

gdzie ξ , zależne od x , jest z przedziału $\langle x_0, x \rangle$, x_0 jest dowolnie obranym biegunem w przedziale $\langle a, b \rangle$. Rozwinięcie jest ważne, gdy funkcja $g(x)$ jest przynajmniej $(m+1)$ -krotnie różniczkowalna w otoczeniu x_0 .

Podstawiając szereg Taylora do lewej strony wzoru (1.3), otrzymamy:

$$\int_a^b \theta(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^m \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} \int_a^b l^k \theta(x)dx + \frac{1}{(m+1)!} \int_a^b l^{m+1} \theta(x) g^{(m+1)}(\xi)dx \quad (3.1)$$

Wyrażając wartości $g(x_i)$ po prawej stronie wzoru (1.3) za pomocą szeregu Taylora oraz zmieniając kolejność sumowania, otrzymamy:

$$\sum_{i=0}^n M_i g(x_i) + \Delta = \sum_{k=0}^m \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} \sum_{i=0}^n M_i l_i^k + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i=0}^n M_i l_i^{m+1} g^{(m+1)}(\xi_i) + \Delta. \quad (3.2)$$

Wyrażenia (3.1) i (3.2) są lewą i prawą stroną tego samego równania, stąd współczynniki stojące przy tych samych pochodnych w obu równaniach muszą być sobie równe, jeśli równanie (1.3) ma być tożsamością. Zatem porównując wyrażenia stojące przy tych samych pochodnych, otrzymamy następujący układ równań na mnożniki M_i i położenie węzłów l_i :

$$\sum_{i=0}^n M_i l_i^k = \int_a^b l^k \theta(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (3.3)$$

przy czym k oznacza rząd pochodnej funkcji $g(x)$, przy której stoją porównane wyrażenia we wzorach (3.1) i (3.2). Prawa strona układu (3.3) jest znana – przedstawia momenty funkcji wagowej $\theta(x)$ względem bieguna x_0 , oznaczane dalej przez J_k . Rozwiązanie tego układu nie zależy od doboru bieguna x_0 , co jest oczywiste, a ponadto daje się łatwo wykazać formalnie (zadanie 1).

Jawna postać układu (3.3) jest następująca:

$$\begin{aligned}
 M_0 + M_1 + \dots + M_n &= J_0 \equiv \int_a^b \theta(x) dx \\
 M_0 l_0 + M_1 l_1 + \dots + M_n l_n &= J_1 \equiv \int_a^b l \theta(x) dx \\
 &\dots\dots\dots \\
 M_0 l_0^n + M_1 l_1^n + \dots + M_n l_n^n &= J_n \equiv \int_a^b l^n \theta(x) dx.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Widzimy, że po lewej stronie układu występują momenty mnożników względem bieguna x_0 , a po prawej – momenty funkcji wagowej względem tegoż bieguna.

Błąd metody Δ otrzymamy, porównując ostatnie wyrazy w równaniach (3.1) i (3.2):

$$\Delta = \frac{1}{(m+1)!} \left[\int_a^b l^{m+1} \theta(x) g^{(m+1)}(\xi) dx - \sum_{i=0}^n M_i l_i^{m+1} g^{(m+1)}(\xi_i) \right],$$

gdzie ξ jest nieznaną funkcją l . Jeśli $l^{m+1} \theta(x)$ jest jednakowego znaku w całym przedziale całkowania, jak i $M_i l_i^{m+1}$ są jednakowego znaku dla wszystkich węzłów, to we wzorze powyższym można zastosować twierdzenie o wartości średniej. Brzmi ono następująco:

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx,$$

gdzie $\xi \in \langle a, b \rangle$, jeśli $\varphi(x)$ nie zmienia znaku w przedziale $\langle a, b \rangle$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla sumy. Wyrażenie na błąd Δ przyjmie wówczas postać:

$$\Delta = \frac{1}{(m+1)!} \left[g^{(m+1)}(\xi_1) \int_a^b l^{m+1} \theta(x) dx - g^{(m+1)}(\xi_2) \sum_{i=0}^n M_i l_i^{m+1} \right], \tag{3.5}$$

gdzie obydwa punkty ξ_1 oraz ξ_2 leżą wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$.

Jeśli przyjąć, że $g^{(m+1)}(\xi_1) \approx g^{(m+1)}(\xi_2)$, czyli że pochodna funkcji $g(x)$ słabo się zmienia w obrębie przedziału całkowania, to ze wzoru (3.5) otrzymamy ostatecznie wzór na błąd metody Δ :

$$\Delta = \frac{1}{(m+1)!} \left[\int_a^b l^{m+1} \theta(x) dx - \sum_{i=0}^n M_i l_i^{m+1} \right] g^{(m+1)}(\eta), \tag{3.6}$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$. By to jednak udowodnić ściśle, musimy odwołać się do błędu Δ danego wzorem (2.5). Gdy funkcja wagowa $\theta(x)$ jest stałego znaku w przedziale całkowania, do wzoru na błąd Δ możemy zastosować twierdzenie o wartości średniej:

$$\int_a^b \theta(x) \varepsilon(x) dx = \varepsilon(\xi) \int_a^b \theta(x) dx,$$

gdzie $\xi \in \langle a, b \rangle$. Widzimy zatem, że błąd Δ wyraża się za pomocą punktu leżącego w obrębie przedziału całkowania. Można pokazać, że wartość $g^{(m+1)}(\eta)$ leży na zewnątrz przedziału liczbowego:

$$\langle g^{(m+1)}(\xi_1), g^{(m+1)}(\xi_2) \rangle.$$

Zwróćmy uwagę, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym we wzorze (3.6) przedstawia różnicę pomiędzy prawą P i L lewą stroną równania dla $k = m + 1$ w układzie równań (3.3) czy (3.4), tj. pierwszego równania niespełnionego przez mnożniki i węzły.

Jeśli $m + 1$ pochodna funkcji $g(x)$ nie jest stała, błędu metody nie można obliczyć dokładnie. Błąd można jedynie oszacować, podając wartość od góry i dołu, ale tylko wtedy, gdy funkcja podcałkowa zadana jest analitycznie, $l^{m+1}\theta(x)$ jest jednakowego znaku w całym przedziale całkowania i gdy $M_i l_i^{m+1}$ są jednakowego znaku dla wszystkich węzłów.

Z przedstawionej tu metody w sposób oczywisty wynika, że rząd dokładności całkowania numerycznego m jest równy liczbie równań w układzie (3.3) czy (3.4), jakie spełniają odcięte węzłów i mnożniki, pomniejszonej o 1. Jeśli funkcja wagowa jest parzysta względem środka przedziału całkowania i jednocześnie węzły są położone symetrycznie względem tegoż środka, to liczba $m + 1$ we wzorze na błąd (3.5) lub (3.6) jest zawsze parzysta. Najwyższy możliwy rząd dokładności całkowania numerycznego m , przy zastosowaniu $n + 1$ rzędnych do obliczeń, wynosi $2n + 1$, a najmniejszy możliwy wynosi n , w zależności od położenia węzłów.

Jako funkcje wagowe $\theta(x)$ można wybierać tylko takie, by momenty J_k w układzie (3.3) czy (3.4) można było łatwo obliczyć analitycznie dla dowolnego k .

PRZYKŁAD 3. Wyprowadzić wzór na całkowanie numeryczne w postaci:

$$\int_0^1 f(x) dx = M_0 y_{1/4} + M_1 y_{1/2} + M_2 y_{3/4},$$

gdzie rzędne y są w punktach $x = 1/4, 1/2, 3/4$ oraz określić rząd dokładności wzoru m i błąd Δ . R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa jest regularna, $\theta(x) \equiv 1$. Przyjmując biegun x_0 w początku układu, zmienna $l = x$. Stąd momenty funkcji wagowej:

$$J_0 = \int_0^1 dx = 1, \quad J_1 = \int_0^1 x dx = 1/2, \quad J_2 = \int_0^1 x^2 dx = 1/3.$$

Do określenia są 3 mnożniki M_0, M_1, M_2 . Wystarczy zatem wziąć 3 równania w układzie (3.4) dla $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + M_2 &= 1, \\ 1/4 M_0 + 1/2 M_1 + 3/4 M_2 &= 1/2, \\ 1/16 M_0 + 1/4 M_1 + 9/16 M_2 &= 1/3. \end{aligned}$$

Stąd: $M_0 = 2/3, M_1 = -1/3, M_2 = 2/3$.

Zatem: $\int_0^1 f(x) dx = 2/3 y_{1/4} - 1/3 y_{1/2} + 2/3 y_{3/4}$.

Widzimy, że mnożniki mają przebieg symetryczny z uwagi na ich symetryczne położenie względem środka przedziału całkowania.

Aby odpowiedzieć na pytanie, dla jakich wielomianów wzór jest dokładny, musimy sprawdzić, ile równań w układzie (3.4) spełniają węzły i mnożniki.

Równanie dla $k = 3$ ma postać:

$$1/_{64} 2/3 - 1/8 1/3 + 27/_{64} 2/3 = J_3 = 1/4.$$

Jest ono spełnione. Musimy więc sprawdzić, czy jest spełnione równanie dla $k = 4$:

$$1/_{256} 2/3 - 1/_{16} 1/3 + 81/_{256} 2/3 = J_4 = 1/5, \\ 37/_{192} \neq 1/5, \quad 1/5 - 37/_{192} = 7/_{960}.$$

Tak więc wzór ma dokładność rzędu $m = 3$, czyli jest dokładny dla wielomianów stopnia co najwyżej 3. Błąd określa wzór (3.6):

$$\Delta = \frac{1}{4!} \frac{7}{960} f^{(4)}(\eta) = \frac{7}{23\,040} f^{(4)}(\eta).$$

Z układu (3.3) czy (3.4) bezpośrednio wynika, że dla danego układu węzłów mnożniki M_i nie zależą od funkcji $g(x)$. Zależą natomiast od położenia rzędnych funkcji $g(x)$ branych do obliczeń oraz od funkcji wagowej $\theta(x)$. Jeśli biegun x_0 przyjąć w środku przedziału całkowania, czyli gdy $a = -b$, a funkcja wagowa $\theta(x)$ jest parzysta, to całki dla k nieparzystych w układzie (3.3) czy (3.4) zerują się:

$$\sum_{i=0}^n M_i l_i^k = 0.$$

Z równań tych wynika, że gdy węzły położone są symetrycznie względem środka przedziału całkowania, to i mnożniki M_i muszą być symetryczne, tzn. dla rzędnych położonych w tej samej odległości od środka przedziału mnożniki są takie same.

Z układu (3.3) czy (3.4) wynika ponadto, że tylko w przypadku, gdy $\theta(x) \equiv 1$ można stosować całkowanie złożone. W przeciwnym przypadku prawe strony w układzie (3.4) zmieniają się od przedziału do przedziału, tym samym w każdym podprzedziale trzeba byłoby stosować inne mnożniki M_i , co nie ma sensu, zwłaszcza w obliczeniach ręcznych. Tak więc praktycznie jedynym sposobem zwiększenia dokładności wzoru (1.3) jest stosowanie wzorów o wysokich rzędach dokładności. W przypadku stosowania wzoru (1.2) do całkowania funkcji regularnych należy stosować całkowanie złożone przy użyciu wzorów o niskich rzędach dokładności. Wzory o wysokich rzędach są uciążliwe w zastosowaniach i mniej skuteczne, niż wzory o niskich rzędach.

Układ (3.3) można jeszcze prościej wyprowadzić. Mianowicie, jeśli wzór (1.3) ma być dokładny dla funkcji $g(x)$ będących wielomianami co najwyżej stopnia m , to musi być dokładny, gdy:

$$g(x) = 1, l, l^2, \dots, l^m.$$

Podstawiając za $g(x)$ jednomiany l^k , dla $k = 0, 1, \dots, m$ we wzorze (1.3), otrzymamy natychmiast układ (3.3) czy (3.4). By otrzymać wzór na błąd całkowania numerycznego, w miejsce funkcji $g(x)$ należy podstawić resztę wzoru Taylora.

PRZYKŁAD 4. Wyprowadzić wzór na całkowanie numeryczne w postaci:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = M_0 g(-1) + M_1 g(0) + M_2 g(1)$$

oraz określić rząd dokładności wzoru m i błąd Δ .

R o z w i ą z a n i e. Funkcja wagowa $\theta(x) \equiv (1-x^2)^{-1/2}$. Przyjmując biegun x_0 w początku układu, zmienna $l = x$. Stąd momenty funkcji wagowej wynoszą:

$$J_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi, \quad J_1 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad J_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

(całki te są elementarne, jeśli zastosować podstawienie $x = \cos \theta$). Funkcja wagowa $\theta(x)$ jest symetryczna względem środka przedziału całkowania, podobnie rzędne położone są symetrycznie, co powoduje, że mnożniki muszą mieć także przebieg symetryczny. Dlatego wystarczy wziąć dwa równania w układzie (3.4) dla $k = 0, 2$, z uwagi na dwie niewiadome $M_0 = M_2$ i M_1 :

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + M_2 &= \pi, \\ M_0 + M_2 &= \pi/2. \end{aligned}$$

Stąd: $M_0 = M_2 = \pi/4, M_1 = \pi/2$.

Zatem:
$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} (g_{-1} + 2g_0 + g_1).$$

Aby odpowiedzieć na pytanie, dla jakich wielomianów wzór jest dokładny, musimy sprawdzić, ile równań w układzie (3.4) spełniają węzły i mnożniki. Równanie dla $k = 3$ jest automatycznie spełnione ze względu na symetrię. Musimy więc sprawdzić, czy jest spełnione równanie dla $k = 4$:

$$M_0 + M_2 \neq J_4.$$

Równanie to jest w oczywisty sposób niespełnione, bez konieczności obliczania czwartego momentu funkcji wagowej J_4 . Tak więc wzór ma dokładność rzędu $m = 3$, czyli jest dokładny dla wielomianów stopnia co najwyżej 3. Znajomość J_4 potrzebna jest do wyznaczenia błędu metody Δ . Wielkość ta dana jest wzorem:

$$J_4 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{8} \pi$$

(oblicza się ją, korzystając dwukrotnie ze wzoru na $\cos^2\theta$). Błąd określa wzór (3.6):

$$\Delta = \frac{1}{4!} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) \pi g^{(4)}(\eta) = -\frac{1}{4!} \frac{\pi}{8} g^{(4)}(\eta).$$

PRZYKŁAD 5. Wyprowadzić wzór na całkowanie numeryczne w postaci:

$$\int_0^\infty e^{-x} g(x) dx = M_0 g(x_0) + M_1 g(x_1)$$

oraz dobrać położenie rzędnych w taki sposób, by rząd dokładności wzoru m był możliwie wysoki. Określić błąd Δ dla tego przypadku.

R o z w i ą z a n i e. Momenty funkcji wagowej wynoszą $J_k = k!$ (patrz całki specjalne w § 29). Stąd $J_0 = 1$, $J_1 = 1$. Do wyznaczenia mnożników M_0 i M_1 musimy wziąć dwa równania w układzie (3.4) dla $k = 0$ i 1 :

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 &= 1, \\ x_0 M_0 + x_1 M_1 &= 1. \end{aligned}$$

Stąd:
$$\begin{aligned} M_0 &= (x_1 - 1)/(x_1 - x_0), \\ M_1 &= (1 - x_0)/(x_1 - x_0). \end{aligned}$$

Widzimy, że mnożniki zależą od położenia rzędnych, co powinno być oczywiste. Położenie rzędnych możemy tak dobrać, by rząd dokładności wzoru był jak najwyższy, czyli by spełnione były dwa następne równania z układu (3.4) dla $k = 2$ i 3 :

$$\begin{aligned} x_0^2 M_0 + x_1^2 M_1 &= 2, \\ x_0^3 M_0 + x_1^3 M_1 &= 6. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Jest to nieliniowy układ z dwiema niewiadomymi, który jest niełatwy do ścisłego rozwiązania. Można go rozwiązać numerycznie, korzystając z Solvera w Excelu w zakładce Narzędzia. Rozwiązanie jest natychmiastowe. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,585\,786\,437\,627, & x_1 &= 3,414213562373, \\ M_0 &= 0,853\,553\,390\,593, & M_1 &= 0,146\,446\,609\,407. \end{aligned}$$

Rząd dokładności otrzymanego wzoru $m = 3$. Równanie dla $k = 4$ jest następujące:

$$x_0^4 M_0 + x_1^4 M_1 = 20 \neq 4! = 24.$$

Błąd określa wzór (3.6):

$$\Delta = \frac{1}{4!} (24 - 20) g^{(4)}(\eta) = \frac{1}{3!} g^{(4)}(\eta).$$

Spróbujmy jednak rozwiązać układ (3.7) analitycznie Podstawiając do niego wartości mnożników, otrzymamy jawny układ na położenie węzłów:

$$\begin{aligned}x_0^2(x_1-1) + x_1^2(1-x_0) &= 2(x_1-x_0), \\x_0^3(x_1-1) + x_1^3(1-x_0) &= 6(x_1-x_0).\end{aligned}$$

Układ ten można nieco uprościć, porządkując względem czynników $(1-x_0)$ i $(1-x_1)$ w obu równaniach. Otrzymamy dwa równania rozprężone, które muszą równać się pewnej stałej:

$$\begin{aligned}\frac{x_0^2-2}{1-x_0} &= \frac{x_1^2-2}{1-x_1} \equiv c_2, \\ \frac{x_0^3-6}{1-x_0} &= \frac{x_1^3-6}{1-x_1} \equiv c_3.\end{aligned}$$

Można sprawdzić, że stała $c_2 = -4$, a stała $c_3 = -14$. Pierwsze z tych równań przyjmuje postać:

$$(x^2-2)/(1-x) = -4,$$

co prowadzi do równania $x^2-4x+2=0$. Ma ono dwa pierwiastki:

$$x_{0,1} = 2 \mp \sqrt{2}.$$

Stąd, mnożniki wynoszą:

$$M_{0,1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

Wielkości te są identyczne z otrzymanymi wcześniej na drodze numerycznej. Ciekawe, że drugie z równań ze stałą c_3 nie odgrywa tu roli. Jak zobaczymy później, pierwsze równanie ze stałą c_2 jest wielomianem Laguerre'a $L_2(x) \equiv x^2-4x+2$.

Zadania

1. Udowodnić, że rozwiązanie układu (3.4) nie zależy od przyjętego bieguna x_0 .

D o w ó d l o g i c z n y . Zauważmy, że rozwiązanie układu (3.4) nie zależy od funkcji $g(x)$. Funkcja ta może być zatem dowolną funkcją regularną, jak np. wielomianem, w szczególności – szeregiem Taylora z dowolnie wybranym biegunem x_0 . Funkcja $g(x)$ wpływa jedynie na błąd całkowania Δ .

D o w ó d f o r m a l n y . Weźmy dowolne równanie o numerze k z układu (3.4):

$$M_0 l_0^k + M_1 l_1^k + \dots + M_n l_n^k = J_n \equiv \int_a^b l^k \theta(x) dx,$$

gdzie $l = x - x_0$. Różniczkując je względem x_0 , otrzymamy:

$$M_0 k(-1) l_0^{k-1} + M_1 k(-1) l_1^{k-1} + \dots + M_n k(-1) l_n^{k-1} = \int_a^b k(-1) l^{k-1} \theta(x) dx.$$

Dzieląc przez stałą $-k$, otrzymamy równanie o numerze $k-1$ w układzie (3.4):

$$M_0 l_0^{k-1} + M_1 l_1^{k-1} + \dots + M_n l_n^{k-1} = J_n \equiv \int_a^b l^{k-1} \theta(x) dx.$$

Otrzymamy więc układ identyczny, jak przed różniczkowaniem, co oznacza, że układ ten nie zależy od bieguna x_0 .

2. Wyprowadzić wzór na numeryczne obliczanie całki:

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x) dx = h(H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2)$$

w oparciu o kwadratowy trójmian interpolacyjny Lagrange'a $L_2(x)$, dany wzorem (2.3).

R o z w i ą z a n i e. Mamy więc obliczyć następującą całkę:

$$\int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 \right] dx.$$

Zastosujemy podstawienie $l = x - x_0$, gdzie l oznacza odległość punktu od x_0 . Zatem $x_1 - x_0 = l_1$, $x_2 - x_0 = h$ jest długością przedziału całkowania. Punkt x_1 nie musi leżeć wewnątrz przedziału całkowania, może leżeć też na zewnątrz, ważne jest, by punkty były rozdzielne. Podstawiając $l = x - x_0$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left[\frac{(l-l_1)(l-h)}{-l_1(-h)} y_0 + \frac{l(l-h)}{l_1(l_1-h)} y_1 + \frac{l(l-l_1)}{h(l_2-l_1)} y_2 \right] dl = \\ & = y_0 \int_0^h \frac{(l-l_1)(l-h)}{l_1 h} dl + y_1 \int_0^h \frac{l(l-h)}{l_1(l_1-h)} dl + y_2 \int_0^h \frac{l(l-l_1)}{h(l_2-l_1)} dl. \end{aligned}$$

Całki przy rzędnych określają poszukiwane mnożniki. Mianowniki funkcji podcałkowych są stałe, wystarczy całkować liczniki, co jest elementarne. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} & y_0 \frac{-\frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{2}l_1 h^2}{l_1 h} + y_1 \frac{-\frac{1}{6}h^3}{l_1(l_1-h)} + y_2 \frac{\frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{2}l_1 h^2}{h(l_2-l_1)} = \\ & = \frac{-\frac{1}{6}h^2 + \frac{1}{2}l_1 h}{l_1} y_0 + \frac{\frac{1}{6}h^3}{l_1(h-l_1)} y_1 + \frac{\frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{2}l_1 h}{h-l_1} y_2. \end{aligned}$$

Wyrażenia ułamkowe stojące przy rzędnych są poszukiwanymi mnożnikami M_i . Wyciągając $\frac{1}{6}h$ przed ułamki, otrzymamy wyrażenie na całkę:

$$\frac{1}{6}h \frac{-h+3l_1}{l_1} y_0 + \frac{1}{6}h \frac{h^2}{l_1(h-l_1)} y_1 + \frac{1}{6}h \frac{2h-3l_1}{h-l_1} y_2.$$

Wyciągając h przed nawias oraz wprowadzając bezwymiarowe położenie rzędnej y_1 w przedziale $R = l_1/h$, otrzymamy ostatecznie:

$$h \left[\frac{-1+3R}{6R} y_0 + \frac{1}{6R(1-R)} y_1 + \frac{2-3R}{6(1-R)} y_2 \right].$$

Zatem:
$$H_0 = \frac{-1+3R}{6R}, \quad H_1 = \frac{1}{6R(1-R)}, \quad H_2 = \frac{2-3R}{6(1-R)} y_2,$$

przy czym R nie może być równe 0 ani 1.

3. Wyprowadzić wzór na całkowanie numeryczne w postaci:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} g(x) dx = M_0 g(0) + M_1 g(1) + M_2 g(2)$$

oraz określić rząd dokładności wzoru m i błąd Δ .

R o z w i ą z a n i e. Przyjmujemy biegun x_0 w początku układu, zmienna $l = x$. Momenty funkcji wagowej wynoszą $J_k = k!$ (patrz całki specjalne w § 29). Stąd $J_0 = 1$, $J_1 = 1$, $J_2 = 2$. Do wyznaczenia mnożników M_0 , M_1 i M_2 musimy wziąć trzy równania w układzie (3.4) dla $k = 0, 1$ i 2 :

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + M_2 &= 1, \\ M_1 + 2M_2 &= 1, \\ M_1 + 4M_2 &= 2. \end{aligned}$$

Stąd: $M_0 = M_2 = 1/2$, $M_1 = 0$.

Zatem:
$$\int_{-1}^1 e^{-x} g(x) dx = \frac{1}{2} (g_0 + g_2).$$

Aby odpowiedzieć na pytanie, jaki jest rząd dokładności, musimy sprawdzić, czy jest spełnione równanie dla $k = 3$:

$$M_1 + 8M_2 \neq J_3 = 6.$$

Równanie jest niespełnione, wzór ma więc rząd dokładności $m = 2$. Błąd określa wzór (3.6):

$$\Delta = \frac{1}{3!} (6-4) g^{(3)}(\eta) = \frac{1}{3} g^{(3)}(\eta).$$

4. Wyprowadzić wzór na obliczanie całki:

$$C_n \equiv \int_0^h x^n y dx = M_0 g_0 + M_1 g_1 + M_2 g_2$$

oraz określić rząd dokładności otrzymanego wzoru; y_0 , y_1 i y_2 są to rzędne funkcji y na początku, w środku i na końcu przedziału całkowania.

R o z w i ą z a n i e. Z zadania wynika, że funkcją wagową musi być $\theta(x) = x^n$. Mnożniki wyznacza układ (3.4), w którym momenty funkcji wagowej J_k są następujące:

$$J_k = \int_0^h x^{n+k} dx = h^{n+k+1} / (n+k+1).$$

Układ równań przyjmie więc postać:

$$\begin{aligned}M_0 + M_1 + M_2 &= h^{n+1}/(n+1), \\ \frac{1}{2}hM_1 + hM_2 &= h^{n+2}/(n+2), \\ (\frac{1}{2}h)^2M_1 + h^2M_2 &= h^{n+3}/(n+3).\end{aligned}$$

Upraszczając go, otrzymamy:

$$\begin{aligned}M_0 + M_1 + M_2 &= h^{n+1}/(n+1), \\ \frac{1}{2}M_1 + M_2 &= h^{n+1}/(n+2), \\ \frac{1}{4}M_1 + M_2 &= h^{n+1}/(n+3).\end{aligned}$$

Widzimy, że mnożniki są proporcjonalne do h^{n+1} . Rozwiązując układ, otrzymamy:

$$\begin{aligned}M_0 &= h^{n+1}[1/(n+1) - 3/(n+2) + 2/(n+3)] \\ &= h^{n+1}(1-n)/(n+1)(n+2)(n+3), \\ M_1 &= 4h^{n+1}[1/(n+2) - 1/(n+3)] = 4h^{n+1}/(n+2)(n+3), \\ M_2 &= h^{n+1}[2/(n+3) - 1/(n+2)] = h^{n+1}(n+1)/(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

Zatem całka wyrazi się wzorem:

$$C_n \equiv \int_0^h x^n y dx = \frac{h^{n+1}}{(n+2)(n+3)} \left[\frac{1-n}{1+n} y_0 + 4y_1 + (n+1)y_2 \right],$$

C_1 jest momentem statycznym, a C_2 – momentem bezwładności pola względem początku układu.

Równanie dla $k = 3$ w układzie (3.4) ma postać:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}M_1 + M_2 &= h^{n+1}/(n+4) \\ (n+1,5)/(n+2)(n+3) &\neq 1/(n+4).\end{aligned}$$

Nie jest ono spełnione. Zatem rząd dokładności wzoru na C_n wynosi $m = 2$, bez względu na rząd momentu n .

§ 4. Wzory najwyższej dokładności

Gdy odcięte l_i są wiadome, układ (3.3) czy (3.4) jest układem liniowym ze względu na mnożniki M_i , łatwym do rozwiązania w zapisie macierzowym. Przy zastosowaniu n rzędnych do obliczeń, mamy n równań na n mnożników M_i , gdzie $i = 1, 2, \dots, n$. Rząd dokładności takiego wzoru $m = n$, gdy węzły obrane są w sposób dowolny. Gdy węzły są symetryczne względem środka przedziału całkowania, $m \geq n + 1$, w zależności od położenia węzłów, lecz nie więcej niż $2n - 1$.

W § 2 węzły numerowaliśmy od $i = 0$ do n . Liczba rzędnych równa się wtedy $n + 1$. Takie numerowanie ma pewne uzasadnienie w metodach równokrokových, gdy przedział całkowania pokrywa się ze skrajnymi węzłami. W innych przypadkach, zwłaszcza

gdy węzły leżą wewnątrz przedziału całkowania, wygodniej jest numerować je od 1 do n , jak w przypadku wzorów Czebyszewa czy Gaussa-Legendre'a.

W przypadku, gdy odcięte l_i są niewiadome, układ (3.3) czy (3.4) jest nieliniowy, tym samym trudny do rozwiązania. Rozwiązanie można znacznie uprościć pewnym chwytem, znajdując najpierw położenie węzłów l_i , niezależnie od układu równań. Maksymalnie dla n rzędnych liczba równań w układzie (3.3) wynosi $2n$, tym samym rząd dokładności wzoru (1.3) wynosi $m = 2n - 1$. Jeśli we wzorze (1.3) podstawimy $g(x) = l^k w_n(l)$, gdzie $k \leq n$, a $w_n(l)$ jest wielomianem stopnia n zmiennej $l = x - x_0$, to k -te równanie w układzie (3.3) przyjmie postać:

$$\sum_{i=0}^n M_i l_i^k w_n(l_i) = \int_a^b \theta(x) l^k w_n(l) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

które jest spełnione dokładnie, bo stopień wielomianu $l^k w_n(l)$ nie przekracza $2n - 1$. Jeśli $w_n(l) \equiv G_n(l)$ jest wielomianem ortogonalnym względem funkcji wagowej $\theta(x)$, to całka w powyższym wzorze, na mocy ortogonalności, jest tożsamościowo równa zero dla dowolnego $k < n$. Aby lewa strona była także tożsamościowo równa zero,

$$G_n(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

czyli l_i muszą być pierwiastkami odpowiedniego wielomianu ortogonalnego. Przez wielomian ortogonalny rozumiemy taki wielomian, który spełnia poniższą własność:

$$\int_a^b \theta(x) x^k G_n(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Wielomiany ortogonalne $G_n(x)$ mają n rzeczywistych pierwiastków w przedziale ortogonalności $\langle a, b \rangle$. Znalezienie wielomianów ortogonalnych dla danej funkcji wagowej i danego przedziału całkowania jest zadaniem trudnym, na tyle trudnym, że takie wielomiany znane są dla niewielu przypadków. Oto najważniejsze z nich:

- wielomiany Legendre'a $P_n(x)$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, z funkcją wagową $\theta = 1$, stosowane do całkowania funkcji regularnych metodą Gaussa-Legendre'a,
- wielomiany Czebyszewa I rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, z funkcją wagową $\theta = 1/(1 - x^2)^{1/2}$, stosowane do całkowania metodą Gaussa-Czebyszewa,
- wielomiany Czebyszewa II rodzaju $U_n(x)$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, z funkcją wagową $\theta = (1 - x^2)^{1/2}$, stosowane do całkowania metodą Gaussa-Czebyszewa,
- wielomiany Laguerre'a $L_n(x)$ w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$, z funkcją wagową $\theta = e^{-x}$, stosowane do całkowania metodą Gaussa-Laguerre'a,
- wielomiany Hermite'a $H_n(x)$ w przedziale $\langle -\infty, +\infty \rangle$, z funkcją wagową $\theta = e^{-x^2/2}$, stosowane do całkowania metodą Gaussa-Hermite'a.

Znając położenie węzłów, wyznaczenie mnożników M_i nie przedstawia już żadnych trudności. Tak wyznaczone wzory nazywają się *wzorami Gaussa*. Ściśle rzecz bio-

rąc, gdy występuje funkcja wagowa $\theta(x)$, biegun x_0 musi być w początku układu, stąd $l \equiv x$, tym samym szereg Taylora redukuje się do szeregu Maclaurina.

Jeśli we wzorze (1.3) za $g(x)$ wstawimy $p_i(x)$ lub $p_i^2(x)$, gdzie $p_i(x)$ jest wielomianem Lagrange'a stopnia $n - 1$, danym wzorem (2.2), to uwzględniając, że $p_j(x_j) = \delta_{ij}$, otrzymamy:

$$M_i = \int_a^b \theta(x) p_i(x) dx = \int_a^b \theta(x) p_i^2(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

czyli, że wszystkie mnożniki M_i są dodatnie, gdy funkcja wagowa jest dodatnio określona, zaś węzły są pierwiastkami odpowiedniego wielomianu ortogonalnego.

Błąd wzorów Gaussa podobnie daje się wyrazić analitycznie. Uwzględniając, że rząd dokładności tych wzorów $m = 2n - 1$ oraz że mnożniki mają przebieg symetryczny względem środka przedziału, wzór (3.6) na błąd Δ przybierze postać:

$$\Delta = \frac{g^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \left[\int_a^b l^{2n} \theta(x) dx - \sum_{i=0}^n M_i l_i^{2n} \right],$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$. Z uwagi na ortogonalność, w miejsce l^{2n} możemy wstawić kwadrat wielomianu $s(x)$, gdyż ma ten sam jednomian wiodący. Ponieważ $s(x) = G_n(x)/a_n$, stąd:

$$\Delta = \frac{g^{(2n)}(\eta)}{(2n)! a_n^2} \int_a^b \theta(x) G_n^2(x) dx, \quad (4.2)$$

gdzie a_n jest współczynnikiem wiodącym wielomianu $G_n(x)$, czyli współczynnikiem stojącym przy najwyższej potędze x , a suma znika, gdyż $G_n(x_i) = 0$.

Widzimy, że wielomiany ortogonalne mają podstawowe znaczenia dla całkowania funkcji z wagą – wyznaczają bowiem położenie węzłów, mnożniki M_i oraz błąd metody Δ w formie analitycznej.

Jeśli przyjmiemy rzędne do całkowania w miejscach zerowych wielomianów ortogonalnych uzyskamy wzory o najwyższych *rzędach* dokładności. Gdy nie znamy wielomianów ortogonalnych dla danej funkcji wagowej $\theta(x)$, musimy narzucić położenie rzędnych, a mnożniki wyznaczyć z układu (3.4) lub (5.3). Rząd dokładności wzoru w takim przypadku dany jest wzorem (6.2).

Mówi się, że wzory Gaussa są wzorami o najwyższej dokładności, co nie zawsze jest prawdą. Wysoki rząd dokładności może powodować, że w wielu przypadkach, gdy funkcja nie jest wielomianem, błąd metody Δ może być wyższy, niż w przypadku wzorów o niższych rzędach dokładności.

W przypadku węzłów, które są miejscami zerowymi odpowiednich wielomianów ortogonalnych, mnożniki rzędnych M_i można określić analitycznie, z ominięciem układu równań (3.3) czy (3.4). Punktem wyjścia jest wzór (2.4), w którym wielomian Lagrange'a

wyraża się w postaci (2.10). Tak więc:

$$M_i = \frac{1}{s'(x=x_i)} \int_a^b \theta(x) \frac{s(x)}{(x-x_i)} dx, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

gdzie $s(x)$ jest iloczynem kolejnych jednomianów $(x-x_i)$ od $i=1$ do n . Jest to wielomian stopnia n w rozkładzie na czynniki pierwsze. Scałkowanie tego wzoru jest możliwe jedynie w przypadku, gdy $s(x)$ jest wielomianem ortogonalnym, odpowiadającym funkcji wagowej $\theta(x)$. Zadanie jest jednak wyzywające, bardzo trudne.

Jeśli węzły pokrywają się z pierwiastkami wielomianu ortogonalnego $G_n(x)$, to $G_n(x) = a_n s(x)$, gdzie a_n jest współczynnikiem wiodącym przy najwyższej potędze wielomianu. Zatem $s(x) = G_n(x)/a_n$. Podstawiając tę zależność do równania (4.3), otrzymamy:

$$M_i = \frac{1}{G'_n(x=x_i)} \int_a^b \theta(x) \frac{G_n(x)}{x-x_i} dx, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

W funkcji podcałkowej dokonajmy oczywistego rozszerzenia ułamka $1/(x-x_i)$:

$$\frac{1}{x-x_i} = \frac{1-\left(\frac{x}{x_i}\right)^k}{x-x_i} + \left(\frac{x}{x_i}\right)^k \frac{1}{x-x_i}.$$

Pierwszy ułamek dzieli się przez $(x-x_i)$. W wyniku otrzymamy wielomian stopnia $k-1$. Jeśli $k \leq n$, to wielomian ten, na zasadzie ortogonalności, nie wnosi niczego do całki na mnożnik M_i . Podstawmy zatem drugi ułamek do całki. Otrzymamy zadziwiający wynik, który wydaje się wręcz niewiarygodny:

$$\int_a^b \theta(x) \frac{G_n(x)}{(x-x_i)} dx = \frac{1}{x_i^k} \int_a^b \theta(x) \frac{x^k G_n(x)}{x-x_i} dx.$$

Pamiętając o rozkładzie odwrotności $1/(x-x_i)$, za x^k możemy podstawić dowolny wielomian, byle jego stopień nie przekroczył n . W szczególności możemy przyjąć wielomian ortogonalny $G_{n-1}(x)$. Otrzymamy równość:

$$\int_a^b \theta(x) \frac{G_n(x)}{x-x_i} dx = \frac{1}{G_{n-1}(x_i)} \int_a^b \theta(x) G_{n-1}(x) \frac{G_n(x)}{x-x_i} dx.$$

Ponieważ $G_n(x)/(x-x_i)$ jest wielomianem stopnia $n-1$, stąd:

$$\frac{G_n(x)}{x-x_i} = a_n x^{n-1} + reszta,$$

gdzie *reszta* jest wielomianem stopnia $n-2$. *Reszta* jest więc ortogonalna do $G_{n-1}(x)$, dlatego nie wnosi niczego w powyższej całce. Stąd:

$$\int_a^b \theta(x) \frac{G_n(x)}{x - x_i} dx = \frac{a_n}{G_{n-1}(x_i)} \int_a^b \theta(x) G_{n-1}(x) x^{n-1} dx.$$

Następnie możemy napisać oczywistą tożsamość:

$$x^{n-1} = \left(x^{n-1} - \frac{G_{n-1}(x)}{a_{n-1}} \right) + \frac{G_{n-1}(x)}{a_{n-1}}.$$

Wyrażenie w nawiasie jest wielomianem stopnia $n - 2$, który jest ortogonalny do $G_{n-1}(x)$, dlatego nie wnosi niczego w powyższej całce. Stąd:

$$\int_a^b \theta(x) \frac{G_n(x)}{x - x_i} dx = \frac{a_n}{a_{n-1} G_{n-1}(x_i)} \int_a^b \theta(x) G_{n-1}^2(x) dx.$$

Podstawiając tę całkę do wzoru (4.4), otrzymamy ostatecznie wzór na mnożniki M_i :

$$M_i = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{G'_n(x_i) G_{n-1}(x_i)} \int_a^b \theta(x) G_{n-1}^2(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

Wyrażają się one prostym wzorem z pomocą wielomianów ortogonalnych $G_{n-1}(x)$ i $G'_n(x)$ w punkcie $x = x_i$. Całka we wzorze (4.5) jest stałą, zależną od wielomianu ortogonalnego. Wymiar mnożników M_i jest taki, jak osi x .

§ 5. Całkowanie funkcji regularnych

Do całkowania funkcji regularnych służy wzór (1.2), przy czym prawie zawsze stosuje się całkowanie złożone. Jak wynika z niego, wartość całki oznaczonej w obrębie jednego podprzedziału oblicza się numerycznie, sumując $n + 1$ rzędnych wziętych z podprzedziału całkowania (część rzędnych może być poza podprzedziałem), mnożonych przez odpowiednie współczynniki wagowe.

Wiemy, że biegun x_0 można przyjąć w dowolnym miejscu, np. na początku, w środku lub na końcu przedziału, nie ma to wpływu na rozwiązanie układu (3.3). Kładąc $\theta(x) \equiv 1$ i przyjmując biegun $x_0 = \frac{1}{2}(a + b)$ w środku danego podprzedziału o długości $h = b - a$ oraz stosując podstawienie $l = x - x_0$, układ (3.3) przyjmie postać:

$$\sum_{i=0}^n M_i l_i^k = \int_{-h/2}^{h/2} l^k dl, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Wykonując całkowanie, otrzymamy:

$$\sum_{i=0}^n M_i l_i^k = \begin{cases} 0 & k = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{2}{k+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{k+1} & k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}, \quad (5.1)$$

gdzie l_i mierzone jest od środka danego podprzedziału. Rząd dokładności $m = \max k$ parzystym w układzie (5.1), dla którego równanie jest spełnione. Równanie dla $k = 0$ ma postać:

$$\sum_i M_i = h,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich węzłach, od $i = 0$ do n . Z równania tego wynika, że suma mnożników równa się długości danego podprzedziału całkowania. Tak więc, aby otrzymać bezwymiarowe mnożniki, oznaczone przez H_i , mnożniki M_i należy odnieść do długości h danego podprzedziału całkowania.

Z układu (5.1) wynika, że równania dla k nieparzystych są automatycznie spełnione, jeśli węzły i mnożniki mają przebieg symetryczny, tzn. jeśli mnożniki są takie same dla rzędnych położonych w jednakowej odległości od środka danego podprzedziału całkowania. Tak więc bez rozwiązywania układu (5.1) wiadomo, że gdy $-l_i = l_{n-i}$, to $M_i = M_{n-i}$. Zachodzi też twierdzenie odwrotne, jeśli $M_i = M_{n-i}$, to $-l_i = l_{n-i}$. Własność ta bardzo ułatwia rozwiązywanie układu (5.1). Jeśli węzły nie leżą symetrycznie względem środka podprzedziału, to i mnożniki nie mogą mieć przebiegu symetrycznego, a rząd dokładności takich wzorów nigdy nie będzie mógł być większy niż n .

Wprowadzając bezwymiarowe wielkości:

$$H_i = M_i/h, \quad t_i = l_i/1/2h,$$

gdzie bezwymiarowe odcięte węzłów t_i otrzymuje się, odnosząc wymiarowe odcięte l_i do promienia przedziału $1/2h$, układ (5.1) przyjmie postać:

$$\sum_{i=0}^n H_i t_i^k = \begin{cases} 0 & k = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{k+1} & k = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (5.2)$$

Jawna postać układu (5.1) jest następująca:

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 + \dots + H_n &= 1 \\ H_0 t_0 + H_1 t_1 + \dots + H_n t_n &= 0 \\ H_0 t_0^2 + H_1 t_1^2 + \dots + H_n t_n^2 &= \frac{1}{3} \\ H_0 t_0^3 + H_1 t_1^3 + \dots + H_n t_n^3 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ H_0 t_0^k + H_1 t_1^k + \dots + H_n t_n^k &= \begin{cases} \frac{1}{k+1} & k \text{ parzyste} \\ 0 & k \text{ nieparzyste} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pierwsze równanie w układzie (5.2) czy (5.3) dla $k = 0$ ma postać $\sum_i H_i = 1$. Widzimy, że suma bezwymiarowych mnożników równa się 1.

Rozwiązanie układu (5.3) upraszcza się, gdy węzły są symetryczne względem środka

podprzedziału, bowiem mnożniki mają wówczas przebieg symetryczny, niewiadomych w układzie (5.3) jest wówczas o połowę mniej.

Wzór (3.6) na błąd metody Δ przyjmie postać:

$$\Delta = (h/2)^{m+2} \frac{2}{(m+1)!} \left[\frac{1}{m+2} - \sum_{i=0}^n H_i t_i^{m+1} \right] f^{(m+1)}(\eta), \quad (5.4)$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym przedstawia różnicę pomiędzy prawą i lewą stroną równania dla $k = m + 1$ w układzie (5.3), tj. pierwszego równania niespełnionego przez mnożniki H_i .

Czasami wygodnie jest przyjąć biegun $x_0 = a$ w początku podprzedziału całkowania. Stosując podstawienie $l = x - x_0$, układ (3.3) przyjmie postać:

$$\sum_{i=0}^n M_i l_i^k = \int_0^h l^k dl, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Wykonując całkowanie, otrzymamy:

$$\sum_{i=0}^n M_i l_i^k = \frac{1}{k+1} h^{k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.5)$$

gdzie l_i mierzone jest od dolnej granicy całkowania. Rząd dokładności $m = \max k$ przy-
stemu w układzie (5.1), dla którego równanie jest spełnione.

Dzieląc poszczególne równania w układzie (5.5) przez h^{k+1} , przyjmie on postać:

$$\sum_{i=0}^n H_i t_i^k = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

gdzie $H_i = M_i/h$ oraz $t_i = l_i/h$ to bezwymiarowe mnożniki i odcięte rzędnych.

Jawna postać układu (5.6) jest następująca:

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 + \dots + H_n &= 1 \\ H_0 t_0 + H_1 t_1 + \dots + H_n t_n &= \frac{1}{2} \\ H_0 t_0^2 + H_1 t_1^2 + \dots + H_n t_n^2 &= \frac{1}{3} \\ H_0 t_0^3 + H_1 t_1^3 + \dots + H_n t_n^3 &= \frac{1}{4} \\ &\dots\dots\dots \\ H_0 t_0^k + H_1 t_1^k + \dots + H_n t_n^k &= \frac{1}{k+1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Układ (5.6) czy (5.7) ma te same własności, co układ (5.2) czy (5.3).

Błąd metody Δ wyraża się wzorem (5.4), gdzie wyrażenie w nawiasie kwadratowym przedstawia różnicę pomiędzy prawą i lewą stroną równania dla $k = m + 1$ w układzie (5.7), tj. pierwszego równania niespełnionego przez mnożniki H_i .

Układ (5.3) czy (5.7) oraz wzór (5.4) na błąd całkowania określają wszystkie metody numerycznego obliczania całek oznaczonych funkcji regularnych. W praktyce szerokie zastosowanie znalazły trzy grupy metod całkowania numerycznego: tj. metody:

- Newtona-Cotesa,
- Czebyszewa,
- Gaussa.

We wzorach Newtona-Cotesa odcięte x_i przyjmuje się jako zadane w taki sposób, aby odstęp między rzędnymi były jednakowe. Są więc one dedykowane dla funkcji stabilizowanych. Z układu (5.3) czy (5.7) wyznacza się tylko mnożniki. We wzorach Czebyszewa dobiera się takie położenie węzłów, aby mnożniki M_i miały jednakowe wartości. Natomiast we wzorach Gaussa wszystkie węzły i mnożniki wyznacza się z układu (5.3), przez co osiąga się najwyższy możliwy rząd dokładności m wzorów w odniesieniu do innych metod, przy tej samej liczbie rzędnych wziętych do obliczeń.

W kategoriach bezwymiarowych mnożników, wzór (1.2) na całkowanie funkcji regularnych przyjmuje postać:

$$\int_a^b y(x)dx = h \sum_{i=0}^n H_i y_i + \Delta. \quad (5.8)$$

Ponieważ $\sum_i H_i = 1$, wzór ten ma prostą interpretację geometryczną – całka oznaczona równa się iloczynowi długości przedziału całkowania i średniej ważonej rzędnych.

PRZYKŁAD 6. Wyprowadzić wzór na numeryczna obliczanie całki w postaci:

$$\int_a^b y(x)dx = h(H_0 y_{1/4} + H_1 y_{1/2} + H_2 y_{3/4})$$

za pomocą trzech rzędnych znajdujących się wewnątrz przedziału w odległości $1/4h$, $1/2h$, $3/4h$ od dolnej granicy całkowania. Jaki jest rząd dokładności wzoru?

R o z w i ą z a n i e. Odległości rzędnych od środka przedziału wynoszą:

$$l_0 = -1/4h, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 1/4h,$$

natomiast bezwymiarowe odcięte t_i wynoszą:

$$t_0 = -1/2, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1/2.$$

Ponieważ rzędne położone są symetrycznie względem środka przedziału, to zachodzi symetria mnożników, zatem faktycznie trzeba wyznaczyć dwa mnożniki $H_0 = H_2$ i H_1 . W tym celu wystarczy wziąć dwa niejednorodne równania z układu (5.3) dla $k = 0$ i 2 :

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 + H_2 &= 1, \\ 1/4 H_0 + 1/4 H_2 &= 1/3. \end{aligned}$$

Stąd: $H_0 = 2/3, H_1 = -1/3, H_2 = 2/3.$

Zatem: $\int_a^b y(x)dx = h(2/3 y_{1/4} - 1/3 y_{1/2} + 2/3 y_{3/4}).$

Ze względu na symetrię jest jeszcze spełnione równanie dla $k = 3$ w układzie (5.3), więc $m = 3$. Zatem wyprowadzony wzór ma dokładność rzędu 3, czyli jest dokładny dla wielomianów co najwyżej stopnia 3. Pierwszym niespełnionym równaniem w układzie (5.3) jest równanie dla $k = 4$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \frac{2}{3} + \frac{1}{16} \frac{2}{3} &= \frac{1}{12} \neq \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{12} &= \frac{7}{60}. \end{aligned}$$

Błąd określa wzór (5.4):

$$\Delta = (h/2)^5 \frac{2}{4!} \frac{7}{60} y^{(4)}(\eta) = h^5 \frac{7}{23\,040} y^{(4)}(\eta),$$

gdzie η jest nieznanym punktem, niekoniecznie leżącym w obrębie przedziału całkowania z powodu ujemnego mnożnika, co utrudnia oszacowanie błędu. Niemniej wzór zawiera cenną informację – pokazuje, jak skuteczne jest całkowanie złożone. Gdybyśmy na przykład zmniejszyli przedział całkowania dwukrotnie, błąd całkowania złożonego zmalałby $2^4 = 16$ -krotnie.

§ 6. Wzory Newtona-Cotesa

Wzory te służą do całkowania złożonej funkcji, przy czym w obrębie jednego podprzedziału całkowanie odbywa się za pomocą rzędnych położonych w równych odstępach, z których pierwsza i ostatnia leżą na krańcach podprzedziału. Jak wynika z tego określenia, najmniejsza liczba rzędnych we wzorach Newtona-Cotesa może wynosić 2. Wzory te są szczególnie przydatne do całkowania funkcji zadanych tabelarycznie.

Obierając $n + 1$ rzędnych w jednym podprzedziale, mamy: początkowa odcięta $x_0 = a$, końcowa $x_n = b$, pozostałe rzędne rozmieszczone są w równych odstępach d , zwanym krokiem całkowania, gdzie $d = h/n$, $h = b - a$ jest długością podprzedziału całkowania. Widzimy, że n oznacza także liczbę części, na które podzielony jest podprzedział za pomocą równo rozstawionych rzędnych. Pozostałe węzły interpolacji znajdują się w punktach:

$$x_i = a + id, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

W lokalnym układzie odniesienia l , mierzonym od środka przedziału, dolna granica całkowania $a = -1/2h$. Pozostałe węzły interpolacji znajdują się w punktach:

$$l_i = -1/2h + id, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dzieląc je przez promień przedziału $h/2$, otrzymamy bezwymiarowe odcięte węzłów:

$$t_i = -1 + 2i/n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6.1)$$

Ponieważ odcięte rzędnych we wzorach Newtona-Cotesa są zadane, to znalezienie mnożników H_i odpowiadających tym wzorom za pomocą układu (5.3) nie przedstawia

większych trudności, gdyż jest to układ liniowy ze względu na mnożniki. Ponadto rozwiązanie ułatwia fakt, że mnożniki H_i są takie same dla rzędnych położonych w jednakowej odległości od środka podprzedziału, tzn. $H_i = H_{n-i}$. Mnożniki H_i zależą wyłącznie od liczby kroków n .

Uwzględniając symetrię mnożników, faktyczna liczba niewiadomych, a tym samym równań, zmniejsza się o połowę – odpadają bowiem równania jednorodne, pozostają tylko równania niejednorodne dla parzystych k . Ponadto można łatwo zauważyć, że w przypadku parzystego n , w układzie (5.3) spełnione jest także równanie dla nieparzystego $k = n + 1$. Tak więc rząd dokładności m wzorów Newtona-Cotesa dany jest wzorem:

$$m = \begin{cases} n & n \text{ nieparzyste} \\ n + 1 & n \text{ parzyste} \end{cases} \quad (6.2)$$

W tabeli 1 podane są mnożniki H_i dla poszczególnych wzorów Newtona-Cotesa, określonych przez liczbę n , pochodzące z rozwiązania układu (5.3). Podany jest także rząd dokładności m i stała c we wzorze na błąd metody Δ :

$$\Delta = chd^{m+1}f^{(m+1)}(\eta), \quad (6.3)$$

gdzie η leży w przedziale całkowania. Stałą tę łatwo jest znaleźć za pomocą wzoru (5.4), podstawiając za $h = nd$.

Tab. 1. Współczynniki H_i , rząd dokładności m oraz błąd Δ wzorów Newtona-Cotesa

n	m	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	Stała c
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$-\frac{1}{12}$
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					$-\frac{1}{180}$
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$-\frac{1}{80}$
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			$-\frac{2}{945}$
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$		$-\frac{55}{12\,096}$
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	$-\frac{3}{2\,800}$
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$-\frac{1\,169}{518\,400}$
8	9	$\frac{989}{14175}$	$\frac{5888}{14175}$	$-\frac{928}{14175}$	$\frac{10\,496}{14175}$	$-\frac{4\,540}{14175}$	$\frac{10\,496}{14175}$	$-\frac{928}{14175}$	$-\frac{296}{467\,775}$

Ze względu na symetrię mnożników, podana jest tylko część pełnej tabeli. Można pokazać, że wszystkie mnożniki H_i są liczbami wymiernymi, dodatnimi jedynie dla

$n \leq 7$ i $n = 9$. Pojawianie się ujemnych mnożników przy wysokich n niekorzystnie wpływa na błąd zaokrągleń.

Błąd całkowania złożonego o jednakowej długości podprzedziałów równa się $\Delta = p\Delta_1$, gdzie Δ_1 jest błędem w jednym podprzedziale, danym wzorem (6.3), zaś p jest liczbą podprzedziałów. Podstawiając za $ph = (b - a)$, błąd wyrazi się wzorem:

$$\Delta = c(b - a)d^{m+1}f^{(m+1)}(\eta), \quad (6.4)$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$, a stała c podana jest w tabeli 3.

Jak widać z tabeli 1, stała c we wzorze na błąd Δ zachowują się ze wzrostem n bardzo nieregularnie, przy czym nie ma tendencji do szybkiego zmniejszania się. Jest to zjawisko niekorzystnie odbijające się na dokładności wzorów Newtona-Cotesa, gdyż pochodne wielu funkcji rosną nieograniczenie ze wzrostem rzędu pochodnej i to szybciej niż n^n . Z tego względu nie jest wskazane stosowanie wzorów Newtona-Cotesa dla $n > 6$ do całkowania funkcji niebędących wielomianami.

PRZYKŁAD 7. Obliczyć numerycznie całkę $\int_0^1 dx/(1+x)$ za pomocą całkowania złożonego wzorem Simpsona, II wzorem Simpsona oraz jednokrotnym wzorem Newtona-Cotesa dla $n = 6$ oraz oszacować błąd w ostatnim przypadku.

R o z w i ą z a n i e. Obliczenie przeprowadzimy tabelarycznie. W tabeli wpisujemy jedynie liczniki mnożników H_i , wspólny mianownik N uwzględnimy później, przy obliczaniu całki. Mamy:

$$b - a = 1, \quad d = (b - a)/6 = 1/6, \quad x_i = a + id, \quad i = 0, 1, \dots, 6.$$

i	x_i	$y_i = (1 + x_i)^{-1}$	H_i	$H_i y_i (n = 2)$	H_i	$H_i y_i (n = 3)$	H_i	$H_i y_i (n = 6)$
0	0	1	1	1	1	1	41	41
1	1/6	6/7	4	24/7	3	18/7	216	1296/7
2	1/3	3/4	2	3/2	3	9/4	27	81/4
3	1/2	2/3	4	8/3	2	4/3	272	544/3
4	2/3	3/5	2	6/5	3	9/5	27	81/5
5	5/6	6/11	4	24/11	3	18/11	216	1296/11
6	1	1/2	1	1/2	1	1/2	41	20,5
$\Sigma =$				12,477 056	$\Sigma =$	11,091 126	$\Sigma =$	582,244 372

Długości podprzedziałów: $h = 1/3$ – dla wzoru Simpsona ($n = 2$), $h = 1/2$ – dla II wzoru Simpsona ($n = 3$) oraz $h = 1$ – dla wzoru o $n = 6$. Tak więc stosując wzór (5.8) i pamiętając o wspólnym mianowniku, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx/(1+x) &= 1/3 \cdot 12,477056/6 = 0,693\,170, & n = 2, \\ &= 1/2 \cdot 11,091126/8 = 0,693\,195, & n = 3, \\ &= 1 \cdot 582,244\,372/840 = 0,693\,148, & n = 6. \end{aligned}$$

Dla porównania, wartość dokładna całki to $\ln 2 = 0,693\,147\dots$. Ciekawe, że błąd II wzoru

Simpsona ($n = 3$) jest ponad 2-krotnie większy niż wzoru Simpsona ($n = 2$), co można udowodnić teoretycznie (patrz zadanie 4). Można więc przyjąć to za regułę. Do całkowania numerycznego wzorami Newtona-Cotesa nie należy przyjmować nieparzystej liczby rzędnych. Najdokładniejszy wynik daje wzór o $n = 6$. Różnica jest na 6. miejscu po przecinku. Błąd wynosi zaledwie $\Delta = -0,000001$.

Porównajmy ten błąd z oszacowaniem, danym wzorem (6.3). Wzór dla $n = 6$ ma rząd dokładności 7 (tabela 1). Funkcja podcałkowa $f(x) = (1+x)^{-1}$. Stąd:

$$f^{(8)}(x) = (-1)(-2)\dots(-8)(1+x)^{-9} = 8!/(1+x)^9.$$

Ósma pochodna funkcja $f(x)$ w przedziale całkowania zawiera się w przedziale $\langle 8!/2^9, 8! \rangle$. Stosując wzór (6.3), otrzymamy:

$$\Delta = (-3/2800) \cdot 1 \cdot (1/6)^8 \langle 8!/2^9, 8! \rangle = \langle -0,00002572, -0,00000005 \rangle.$$

Widzimy, że rzeczywisty błąd $\Delta = -0,000001$ zawiera się w przedziale błędu.

Dla początkowych n wzory Newtona-Cotesa mają odrębne nazwy. Dla:

- $n = 1$ – wzór trapezów,
- $n = 2$ – wzór Simpsona,
- $n = 3$ – II wzór Simpsona,
- $n = 4$ – wzór Villarceau (Boole'a),
- $n = 6$ – wzór Hardy'ego.

Jak potwierdza praktyka, najlepsze rezultaty przy całkowaniu funkcji niebędących wielomianami osiąga się, stosując całkowanie złożone za pomocą dwóch pierwszych wzorów. Warto przy tym wiedzieć, że II wzór Simpsona jest mniej dokładny niż wzór Simpsona, który jest najefektywniejszym wzorem spośród wszystkich wzorów Newtona-Cotesa.

Zadania

1. Znaleźć stałą c we wzorze na błąd Δ dla wzorów Newtona-Cotesa, dany wzorem (6.3).

R o z w i ą z a n i e. Podstawiając we wzorze (5.4) $h = nd$, otrzymamy:

$$c = \frac{2(n/2)^{m+2}}{(m+1)!} \left[\frac{1}{m+2} - \sum_{i=0}^n H_i t_i^{m+1} \right].$$

2. Pokazać, że wzór Simpsona jest dokładniejszy niż II wzór Simpsona.

R o z w i ą z a n i e. Wystarczy w tym celu obliczyć błąd całkowania tej samej funkcji w przedziale o tej samej długości h . Obydwa wzory mają ten sam rząd dokładności $m = 3$. Błąd dla dowolnego wzoru Newtona-Cotesa wyraża się wzorem (6.3). Dla wzoru Simpsona przyjmuje postać:

$$\Delta_2 = -1/180 h d^4 f^{(4)}(\eta) = -1/90 d^5 f^{(4)}(\eta) = -1/90 (h/2)^5 f^{(4)}(\eta).$$

Dla II wzoru Simpsona błąd wynosi:

$$\Delta_3 = -\frac{1}{80} h d^4 f^{(4)}(\eta) = -\frac{3}{80} d^5 f^{(4)}(\eta) = -\frac{3}{80} (h/3)^5 f^{(4)}(\eta).$$

Biorąc stosunek obydwu błędów oraz zakładając, że punkt η w obu przypadkach jest taki sam, otrzymamy:

$$\Delta_3/\Delta_2 = \frac{3}{80} \cdot \frac{2}{3}^5 \cdot 90 = \frac{40}{9} = 4,444\dots$$

Widzimy, że błąd całkowania Δ_3 według II wzoru Simpsona jest ponad czterokrotnie większy od błędu, jaki daje wzór Simpsona – wynik, którego nikt by się nie spodziewał.

3. Zbadać błędy całkowania dla wzorów Newtona-Cotesa dla $n = 4$ i 5 oraz 6 i 7 .

R o z w i ą z a n i e. Dla wzoru Newtona-Cotesa dla $n = 4$ błąd dany jest wzorem:

$$\Delta_4 = -\frac{2}{945} h d^6 f^{(6)}(\eta) = -\frac{8}{945} d^7 f^{(6)}(\eta) = -\frac{8}{945} (h/4)^7 f^{(6)}(\eta).$$

Dla wzoru Newtona-Cotesa dla $n = 5$ błąd wynosi:

$$\Delta_5 = -\frac{55}{12096} h d^6 f^{(6)}(\eta) = -\frac{275}{12096} d^7 f^{(6)}(\eta) = -\frac{275}{12096} (h/5)^7 f^{(6)}(\eta).$$

Biorąc stosunek obydwu błędów oraz zakładając, że punkt η w obu przypadkach jest taki sam, otrzymamy:

$$\Delta_5/\Delta_4 = \frac{275}{12096} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 \cdot \frac{945}{8} \approx 0,563.$$

Analogicznie:

$$\Delta_7/\Delta_6 = \frac{1169}{51840} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 \cdot \frac{2800}{3} \approx 5,256.$$

Jak widać, błąd Δ_5 jest *mniej* od błędu Δ_4 , stanowi 56 % Δ_4 , natomiast błąd Δ_7 jest pięciokrotnie *większy* od błędu Δ_6 . Wyniki te potwierdzają kapryśne zachowanie się błędów wzorów Newtona-Cotesa dla wyższych rzędów.

4. Zbadać błędy całkowania złożonego dla wzoru Simpsona i II wzoru Simpsona.

R o z w i ą z a n i e. W zadaniach poprzednich długość podprzedziału h była taka sama, co powodowało, że krok całkowania d dla obu metod był różny. W przypadku całkowania złożonego długość przedziału całkowania $b - a$ i krok całkowania d muszą być takie same (aby tak było, liczba kroków musi być wspólną wielokrotnością 2 i 3). Ponadto wzór Simpsona i II wzór Simpsona mają ten sam rząd dokładności. Biorąc stosunek obydwu błędów, określony wzorem (6.4) oraz zakładając, że punkt η w obu przypadkach jest taki sam, otrzymamy:

$$\Delta_3/\Delta_2 = c_3/c_2 = 180/80 = 2\frac{1}{4} = 2,25,$$

gdzie stałe c podane są w tabeli 1. Widzimy, że błąd całkowania złożonego wg II wzoru Simpsona jest ponad *dwukrotnie* większy od błędu całkowania wg metody Simpsona. Oznacza to, że II wzoru Simpsona nie należy stosować do całkowania numerycznego.

5. Zbadać błędy całkowania złożonego dla wzorów Newtona-Cotesa dla $n = 4$ i 5 oraz 6 i 7 .

R o z w i ą z a n i e. Z zadania 4 wynika, że stosunek błędów całkowania złożonego wzorami o tych samych rzędach dokładności wyraża się wzorami:

$$\Delta_5/\Delta_4 = c_5/c_4 = {}^{275}_{12096} \cdot {}^{945}_8 \approx 2,69.$$

Analogicznie:

$$\Delta_7/\Delta_6 = {}^{1169}_{51840} \cdot {}^{2800}_3 \approx 21,05.$$

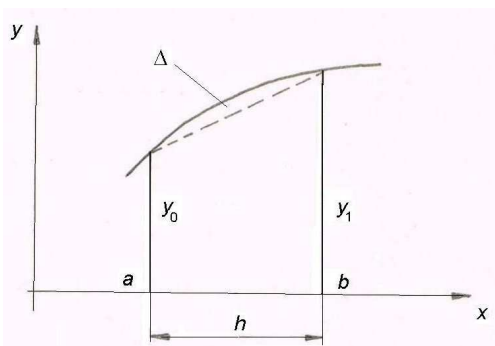
Widzimy, że do całkowania numerycznego nie należy używać wzorów Newtona-Cotesa o nieparzystej liczbie kroków, zwłaszcza wyższych rzędów, bo mają dużo gorszą dokładność, niż wzory o parzystej liczbie kroków.

§ 7. Wzór trapezów

Całkowanie funkcji w obrębie jednego podprzedziału dla $n = 1$ wygląda następująco:

$$\int_a^b y(x) dx = h \left(\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_1 \right) + \Delta, \quad (7.1)$$

gdzie y_0 i y_1 są wartościami funkcji podcałkowej w punktach a i b , czyli na końcach podprzedziału całkowania. Ze wzoru powyższego widać, że wartość całki równa się polu trapezu o bokach y_0 i y_1 (rys. 3). Stąd pochodzi nazwa tego wzoru.



Rys. 3. Interpretacja geometryczna wzoru trapezów i błędu metody Δ

Błąd metody trapezów dla jednego podprzedziału wyraża się wzorem:

$$\Delta = -\frac{1}{12} h^3 y^{(2)}(\eta), \quad (7.2)$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$.

W praktycznym postępowaniu, w celu obliczenia całki w przedziale stosujemy całkowanie złożone, czyli całkowanie krótkimi przedziałami. Liczba podprzedziałów może być dowolna, a długości podprzedziałów niekoniecznie muszą być równe. Wartość całki w każdym podprzedziale oblicza się za pomocą rzędnych funkcji wziętych na końcach każdego podprzedziału całkowania. Zatem całkowanie złożone metodą trapezów wygląda następująco:

$$\int_a^b y(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx = \sum_{i=1}^n h_i \left(\frac{1}{2} y_{i-1} + \frac{1}{2} y_i \right) + \Delta, \quad (7.3)$$

gdzie n jest liczbą podprzedziałów w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Zwykle pomija się szacowanie błędu metody. Postać ogólna błędu jest następująca:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n h_i^3 y^{(2)}(\eta_i).$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej, otrzymamy:

$$\Delta = -\frac{1}{12} y^{(2)}(\eta) \sum_{i=1}^n h_i^3. \quad (7.4)$$

Ostateczna postać wzoru trapezów zależy od sposobu wykonywania obliczeń. Przy wykonywaniu obliczeń na komputerze, najlepsza postać wzoru jest następująca:

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (y_{i-1} + y_i), \quad (7.5)$$

który przy jednakowym kroku (odstępie rzędnych) przyjmuje postać:

$$\int_a^b y(x) dx = h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right), \quad (7.6)$$

gdzie $h \equiv d = (b - a)/n$ jest krokiem całkowania, zaś n jest liczbą kroków. Sumę w nawiasie zapisuje się jako $\Sigma' y_i$, w której pierwszą i ostatnią rzędną bierzemy ze współczynnikiem $\frac{1}{2}$.

Przy ręcznym wykonywaniu obliczeń wzór (7.3) najwygodniej jest przedstawić w następującej postaci:

$$\int_a^b y(x) dx = h \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{h_i}{h} y_{i-1} + \frac{1}{2} \frac{h_i}{h} y_i \right),$$

gdzie $h \equiv d$ jest najczęściej powtarzającym się odstępem pomiędzy rzędnymi.

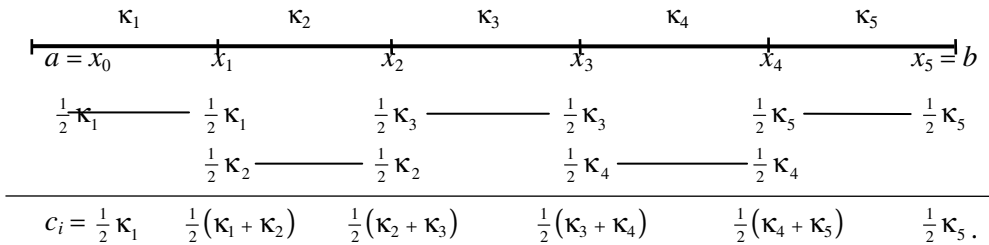
Wprowadzając oznaczenie $\kappa_i = h_i/h$, gdzie κ_i jest skalą danego podprzedziału, wzór powyższy można przekształcić następująco:

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) dx &= h \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \kappa_i y_{i-1} + \frac{1}{2} \kappa_i y_i \right) = \\ &= h \left(\frac{1}{2} \kappa_1 y_0 + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} y_1 + \frac{\kappa_2 + \kappa_3}{2} y_2 + \dots + \frac{\kappa_{n-1} + \kappa_n}{2} y_{n-1} + \frac{\kappa_n}{2} y_n \right) = \\ &= h \sum_{i=0}^n c_i y_i \end{aligned} \quad (7.7)$$

gdzie

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \kappa_1 & i = 0 \\ \frac{1}{2} (\kappa_i + \kappa_{i+1}) & i \in \langle 1, n-1 \rangle \\ \frac{1}{2} \kappa_n & i = n \end{cases}$$

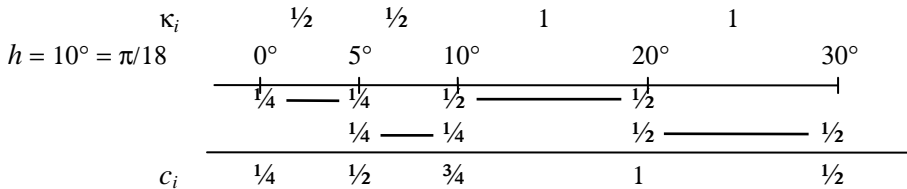
Mnożniki rzędnych c_i należy wyprowadzać przed przystąpieniem do obliczeń, najlepiej według poniższego schematu:



Ostatni wiersz podaje wynikowe mnożniki rzędnych. Jeśli skale długości podprzedziałów κ_i są jednakowe i równe 1, to mnożniki c_i są następujące: $\frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1, 1, \frac{1}{2}$, co uwiarygodnione jest we wzorze (7.6).

PRZYKŁAD 8. Obliczyć numerycznie całkę $\int_0^{\pi/6} \cos x dx$ za pomocą wzoru trapezów, biorąc rzędne w punktach $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ i 30° .

R o z w i ą z a n i e. Najpierw trzeba określić mnożniki c_i dla rzędnych.



Obliczenia ręczne należy przeprowadzać tabelarycznie lub w arkuszu kalkulacyjnym.

i	x_i	$y_i = \cos x_i$	c_i	$y_i c_i$
0	0°	1	$\frac{1}{4}$	0,25
1	5°	0,9962	$\frac{1}{2}$	0,4981
2	10°	0,9848	$\frac{3}{4}$	0,7386
3	20°	0,9397	1	0,9397
4	30°	0,8660	$\frac{1}{2}$	0,4330
			$\Sigma =$	2,8594

Obliczenie całki jest następujące:

$$\int_0^{\pi/6} \cos x dx = h \Sigma y_i c_i = (\pi/18) \cdot 2,8594 = 0,4991.$$

Wartość dokładna tej całki, otrzymana z obliczenia analitycznego, wynosi $\frac{1}{2}$. Jak widać, otrzymaliśmy wynik z niedomiarem (czego należało się spodziewać) wynoszącym 0,0009.

Przy równym odstępnie rzędnych, wzór (7.4) wyrażający błąd całkowania złożonego metodą trapezów, przyjmie postać:

$$\Delta = -\frac{1}{12}(b-a)d^2y^{(2)}(\eta). \quad (7.8)$$

Jak widać, błąd jest proporcjonalny do kwadratu kroku całkowania d .

Łatwo jest zauważyć, że całkowanie metodą trapezów jest równoznaczne aproksymacji funkcji podcałkowej linią łamaną przechodzącą przez końce obranych rzędnych. Błąd metody Δ jest równy polu pomiędzy krzywą i linią łamaną (z uwzględnieniem znaku). Wynika stąd, że uprzednie wykonanie wykresu funkcji podcałkowej ułatwia dobranie odpowiedniego kroku całkowania, zapewniającego dobrą aproksymację krzywej linią łamaną.

§ 8. Wzór Simpsona

Wzór ten opiera się na wykorzystaniu trzech rzędnych do numerycznego obliczenia całki oznaczonej: dwóch na końcach przedziału całkowania i jednej w środku przedziału. Z tabeli 1 dla $n = 2$ (patrz też przykład 1) znajdziemy:

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{6}h(y_0 + 4y_1 + y_2) + \Delta. \quad (8.1)$$

Stosując całkowanie złożone, otrzymamy:

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} y(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6}h_i(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) + \Delta, \quad (8.2)$$

gdzie n jest liczbą podprzedziałów w przedziale $\langle a, b \rangle$, zaś $h_i = x_{2i} - x_{2i-2}$ jest długością danego podprzedziału.

Błąd metody Simpsona dla jednego podprzedziału wyraża się wzorem:

$$\Delta = -\frac{1}{180}hd^4f^{IV}(\eta) = -\frac{1}{90}d^5y^{(4)}(\eta), \quad (8.3)$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$, $h = b - a = 2d$.

Zwykle pomija się szacowanie błędu metody. Postać ogólna błędu jest następująca:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i = -\frac{1}{90}y^{(4)}(\eta) \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{2}\right)^5, \quad (8.4)$$

gdzie zastosowaliśmy twierdzenie o wartości średniej. Wprowadzając skalę długości podprzedziału $\kappa_i = h_i/h$, gdzie $h = 2d$ jest długością najczęściej powtarzających się podprzedziałów, otrzymamy:

$$\Delta = -\frac{1}{90} y^{(4)}(\eta) d^5 \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{h} \right)^5 = -\frac{1}{90} d^5 y^{(4)}(\eta) \sum_{i=1}^n \kappa_i^5.$$

W przypadku podprzedziałów o jednakowej długości, błąd całkowania złożonego wyraża się wzorem:

$$\Delta = -\frac{1}{180} (b-a) d^4 y^{(4)}(\eta), \quad (8.5)$$

gdzie d jest odstępem między rzędnymi, zwanym też krokiem całkowania, zaś $\eta \in \langle a, b \rangle$. Jak widać błąd całkowania jest proporcjonalny do czwartej potęgi kroku całkowania. Na przykład zmniejszając krok całkowania dwukrotnie, można się spodziewać, że błąd całkowania zmaleje ~ 16 -krotnie.

Wzór (8.2) jest wygodny przy wykonywaniu obliczeń na komputerze. Do ręcznych obliczeń lepsza jest następująca postać:

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{2}{3} d \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \kappa_i y_{2i-2} + 2 \kappa_i y_{2i-1} + \frac{1}{2} \kappa_i y_{2i} \right) = \frac{2}{3} d \sum_{i=1}^{2n} c_{si} y_i. \quad (8.6)$$

Mnożniki Simpsona dla rzędnych c_{si} należy wyprowadzić przed przystąpieniem do obliczania całki. Zależą one wyłącznie od liczby i długości przedziałów. Najlepiej jest wyprowadzać je wg poniższego schematu, wiedząc, że dla przedziału o standardowej długości wynoszą one: $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, natomiast dla i -tego podprzedziału o współczynniku skali κ_i wynoszą: $\frac{1}{2}\kappa_i$, $2\kappa_i$, $\frac{1}{2}\kappa_i$.

PRZYKŁAD 9. Wyznaczenia mnożników Simpsona

a	κ_1		κ_2		κ_3		κ_4		κ_5		b
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
$\frac{1}{2}\kappa_1$	$2\kappa_1$	$\frac{1}{2}\kappa_1$		$\frac{1}{2}\kappa_3$	$2\kappa_3$	$\frac{1}{2}\kappa_3$		$\frac{1}{2}\kappa_5$	$2\kappa_5$	$\frac{1}{2}\kappa_5$	
		$\frac{1}{2}\kappa_2$	$2\kappa_2$	$\frac{1}{2}\kappa_2$		$\frac{1}{2}\kappa_4$	$2\kappa_4$	$\frac{1}{2}\kappa_4$			
c_{si}	$\frac{1}{2}\kappa_1$	$2\kappa_1$	$\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$	$2\kappa_2$	$\frac{1}{2}(\kappa_2+\kappa_3)$	$2\kappa_3$	$\frac{1}{2}(\kappa_3+\kappa_4)$	$2\kappa_4$	$\frac{1}{2}(\kappa_4+\kappa_5)$	$2\kappa_5$	$\frac{1}{2}\kappa_5$

Jeśli długości wszystkich podprzedziałów są jednakowe, to wszystkie skale długości κ_i są równe 1. Mnożniki Simpsona mają wówczas następujący przebieg:

$$\frac{1}{2}, 2, 1, 2, 1, \dots, 1, 2, 1, 2, \frac{1}{2},$$

a wzór Simpsona (8.6) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) dx &= \frac{2}{3} d \left(\frac{1}{2} y_0 + 2y_1 + y_2 + \dots + y_{2n-2} + 2y_{2n-1} + \frac{1}{2} y_{2n} \right) = \\ &= \frac{2}{3} d \left[\frac{1}{2} (y_0 + y_{2n}) + 2(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + (y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right], \end{aligned}$$

gdzie $n = (b-a)/2d$ jest liczbą podprzedziałów, d jest krokiem całkowania równym

odstępowi między rzędnymi, zaś $x_i = a + id$, przy czym numer kolejnej rzędnej i zmienia się od $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$ (początkowa rzędna dla $i = 0$ i końcowa dla $i = 2n$ pokrywają się z granicami całkowania).

Całkowanie metodą Simpsona jest równoważne aproksymacji krzywej podcałkowej odcinkami parabol drugiego stopnia.

PRZYKŁAD 10. Obliczyć numerycznie całkę $\int_0^{\pi/6} \cos x dx$ za pomocą metody Simpsona, biorąc rzędne w punktach $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ i 30° .

R o z w i ą z a n i e. Najpierw musimy określić mnożniki Simpsona c_{si} dla rzędnych.

κ	$\frac{1}{2}$		1		
$h = 20^\circ$	0°	5°	10°	20°	30°
	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$		
			$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
c_{si}	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	2	$\frac{1}{2}$

Obliczenia ręczne należy przeprowadzać tabelarycznie lub w arkuszu kalkulacyjnym.

i	x_i	$y_i = \cos x_i$	c_{si}	$y_i c_{si}$
0	0°	1	$\frac{1}{4}$	0,25
1	5°	0,9962	1	0,9962
2	10°	0,9848	$\frac{3}{4}$	0,7386
3	20°	0,9397	2	1,8794
4	30°	0,8660	$\frac{1}{2}$	0,4330
			$\Sigma =$	4,2972

Obliczenie całki metodą Simpsona wg wzoru (8.6) jest następujące:

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{2}{3} d \sum_{i=0}^{2n} y_i c_{si} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{18} \cdot 4,2972 = 0,5000,$$

gdzie $d = \frac{1}{2}h = 10^\circ = \pi/18$. Otrzymaliśmy wynik dokładny w ramach 4 miejsc po przecinku.

PRZYKŁAD 11. Obliczyć liczbę π daną za pomocą całki $\frac{1}{4}\pi = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)}$, wykonując całkowanie z krokiem $d = 0,25$, raz – metodą trapezów, drugi raz – metodą Simpsona.

R o z w i ą z a n i e. Najpierw znajdujemy wartości funkcji podcałkowej w punktach $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ i 1 . Wartości te są następujące:

i	x_i	$y_i = 1/(1+x_i^2)$
0	0	1
1	$\frac{1}{4}$	16/17
2	$\frac{1}{2}$	0,8
3	$\frac{3}{4}$	0,64
4	1	0,5

Wzór trapezowy daje wartość:

$$\frac{1}{4}\pi = d \sum_{i=0}^4 y_i c_i = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2} y_4 \right),$$

skąd:

$$\pi = y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}(y_0 + y_4) = 3,131\,1764.$$

Wzór Simpsona daje zaś wartość:

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}d \sum_{i=0}^4 y_i c_{si} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} y_0 + 2y_1 + y_2 + 2y_3 + \frac{1}{2} y_4 \right),$$

skąd:

$$\pi = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_4) + y_2 + 2(y_1 + y_3) \right] = 3,141\,5685.$$

Z dokładnością do siedmiu cyfr po przecinku liczba $\pi = 3,141\,5926$. Porównanie z powyższymi wartościami jeszcze raz wykazuje przewagę wzoru Simpsona, który daje wynik z pięcioma cyframi dokładnymi, podczas gdy wzór trapezów daje tylko dwie cyfry dokładne. Przy użyciu mniejszego kroku całkowania $d = 0,1$ wzór trapezów daje liczbę $\pi = 3,139\,9260$, a wzór Simpsona daje $\pi = 3,141\,5922$. Ta ostatnia wartość ma 7 cyfr dokładnych, podczas gdy wartość uzyskana wzorem trapezów została niewiele poprawiona. Można sprawdzić, że błąd wzoru trapezów zmalał $6,26 = 2,5^2$ razy, natomiast dużo mniejszy błąd wzoru Simpsona zmalał aż 60 razy, czyli bardziej niż $2,5^4 = 39$ razy.

§ 9. Zwiększenie dokładności obliczeń

Najprostszym, oczywistym sposobem zwiększania dokładności obliczeń całek metodą trapezów czy Simpsona jest zmniejszanie kroku całkowania d . Sposób ten ma ograniczone zastosowanie w przypadku funkcji podcałkowych określonych tabelarycznie.

Następnym sposobem zwiększania dokładności obliczeń, nasuwającym się w sposób oczywisty, jest uwzględnianie w obliczeniach błędu metody Δ , czego zazwyczaj się nie robi, ponieważ szacowanie błędu jest pracochłonne. Przy danym podziale na podprzedziały całkowania, błąd całkowania złożonego metodą trapezów wyraża się wzorem (7.4):

$$\Delta = -\frac{1}{12} y^{(2)}(\eta) \sum_{i=1}^n h_i^3,$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$. Natomiast błąd metody Simpsona wyraża się wzorem (8.4):

$$\Delta = -\frac{1}{90} y^{(4)}(\eta) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} h_i \right)^5,$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$. Widzimy, że oszacowanie błędu metody sprowadza się do szacowania odpowiedniej pochodnej (drugiej lub czwartej) funkcji podcałkowej w obrębie przedziału całkowania. Znajdując minimalną i maksymalną wartość odpowiedniej pochodnej w przedziale całkowania, możemy napisać, że:

$$m_2 \leq y^{(2)}(\eta) \leq M_2, \quad m_4 \leq y^{(4)}(\eta) \leq M_4.$$

Stąd już prosto wynika oszacowanie przedziału błędu w metodach trapezów i Simpsona:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12}(\Sigma h_i^3)M_2 &\leq \Delta \leq -\frac{1}{12}(\Sigma h_i^3)m_2, \\ -\frac{1}{90}\left[\Sigma\left(\frac{1}{2}h_i\right)^5\right]M_4 &\leq \Delta \leq -\frac{1}{90}\left[\Sigma\left(\frac{1}{2}h_i\right)^5\right]m_4. \end{aligned}$$

Oznaczając granice przedziału błędu przez α i β , możemy napisać, że $\alpha < \Delta < \beta$, co można zapisać:

$$\Delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \pm \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \Delta_p \pm \Delta_r, \quad (9.1)$$

gdzie Δ_p jest środkiem przedziału błędu, czyli *poprawką błędu*, zaś Δ_r jest promieniem przedziału błędu, czyli *tolerancją błędu*.

Jak widać, znajdowanie granic przedziału błędu α i β związane jest z poszukiwaniem absolutnych ekstremów odpowiedniej pochodnej w obrębie przedziału całkowania, co bywa uciążliwe i możliwe tylko w przypadku analitycznych funkcji podcałkowych. Co prawda pochodne można aproksymować za pomocą odpowiednich różnic, lecz ich obliczanie jest pracochłonne. Tłumaczy to, dlaczego prawie nigdy nie szacuje się przedziału błędu.

W odróżnieniu od szacowania przedziału błędu, obliczanie poprawki błędu jest proste, gdy krok całkowania d jest stały w całym przedziale całkowania. Poprawka dla metody trapezów wynosi:

$$\Delta_p = -\frac{1}{12}d^3 \sum_{i=1}^n y^{(2)}(\eta_i) = -\frac{1}{12}d^3 \sum_{i=1}^n \frac{y'_i - y'_{i-1}}{d},$$

co prowadzi do wzoru:

$$\Delta_p \approx -\frac{1}{12}d^2(y'_n - y'_0) = -\frac{1}{12}d(\delta y_n - \delta y_0). \quad (9.2)$$

Analogicznie, poprawka dla metody Simpsona wynosi:

$$\Delta_p \approx -\frac{1}{180}d^4(y'''_{2n} - y'''_0) = -\frac{1}{180}d(\delta^3 y_n - \delta^3 y_0). \quad (9.3)$$

Uwzględnianie poprawki znacznie podnosi dokładność obliczeń. W tym celu wystarczy obliczyć na końcach przedziału całkowania pochodne lub różnice centralne.

Jeśli znany jest rząd błędu Δ , to do określenia błędu całkowania złożonego można zastosować metodę dwukrotnego obliczenia całki, zwaną *ekstrapolacją Richardsona*. W przybliżeniu można przyjąć, że:

$$\Delta = ch^m,$$

gdzie c jest pewną stałą, $h = (b - a)/n$ jest długością podprzedziałów całkowania, m jest rzędem pochodnej występującej w błędzie, zaś n jest liczbą podprzedziałów. W metodzie trapezów rząd dokładności $m = 2$, a w metodzie Simpsona $m = 4$.

Wykonując dwukrotne obliczenie numeryczne tej samej całki przy różnych liczbach podprzedziałów n_1 i n_2 , można napisać:

$$\begin{aligned} J &= J_1 + ch_1^m, \\ J &= J_2 + ch_2^m \end{aligned}$$

Z powyższego układu można wyznaczyć dokładniejszą wartość całki niż wynosi wynik J_2 , otrzymany dla krótszych podprzedziałów ($h_2 < h_1$), mianowicie:

$$J = J_2 + \frac{J_2 - J_1}{\alpha^m - 1}, \quad (9.4)$$

gdzie $\alpha = h_1/h_2$. Ze wzoru (9.4) wynika, że gdy $J_1 \neq J_2$, to J zawsze leży na zewnątrz przedziału $\langle J_1, J_2 \rangle$. Stąd metoda Richardsona jest *ekstrapolacją*.

PRZYKŁAD 12. Obliczyć dokładniejszą wartość liczby π na podstawie danych zawartych w przykładzie na s. 42.

R o z w i ą z a n i e. Stosując dwukrotnie metodę trapezów, uzyskano następujące wyniki:

$$\begin{array}{ll} \text{przy kroku } d_1 = 0,25 & J_1 = 3,131\,176\,4, \\ \text{przy kroku } d_2 = 0,1 & J_2 = 3,139\,925\,97. \end{array}$$

Zatem $\alpha = h_1/h_2 = d_1/d_2 = 2,5$. W metodzie trapezów $m = 2$, stąd $\alpha^m = 6,25$. Stosując wzór (9.4), otrzymamy $J = 3,141\,5926$.

Stosując dwukrotnie metodę Simpsona, uzyskano następujące wyniki:

$$\begin{array}{ll} \text{przy kroku } d_1 = 0,25 & J_1 = 3,141\,5685, \\ \text{przy kroku } d_2 = 0,1 & J_2 = 3,141\,5922. \end{array}$$

W metodzie Simpsona $m = 4$, stąd $\alpha^m = 2,5^4 = 39,0625$. Stosując wzór (9.4), otrzymamy $J = 3,141\,5928$.

Jak widzimy, zastosowanie ekstrapolacji Richardsona radykalnie zwiększyło dokładność wyników w obydwóch metodach, które po tej operacji są jednakowo bliskie wartości dokładnej, ale to nie jest reguła. Przy obliczaniu J wg wzoru (9.4), można nie uwzględniać początkowych wspólnych cyfr w J_1 i J_2 , gdyż te same cyfry wystąpią również w J .

Najczęściej przy drugim całkowaniu z zastosowaniem wzorów Newtona-Cotesa przyjmuje się krok całkowania $d_2 = \frac{1}{2}d_1$. Wzór (9.4) dla metody trapezów przyjmuje wówczas postać:

$$J = \frac{4}{3}J_2 - \frac{1}{3}J_1. \quad (9.5)$$

Ciekawe jest to, co łatwo jest sprawdzić (patrz zadanie 3 i 4), że w tym szczególnym przypadku otrzymuje się wynik całkowania J identyczny z wynikiem, jaki uzyskano by przy zastosowaniu metody Simpsona z krokiem całkowania d_2 . Natomiast przy dwukrotnym zastosowaniu metody Simpsona, raz z krokiem d_1 , drugi raz z krokiem $d_2 = \frac{1}{2}d_1$, ze wzoru (9.4) otrzymamy:

$$J = \frac{16}{15} J_2 - \frac{1}{15} J_1, \quad (9.6)$$

który jest identyczny z wynikiem, jaki uzyskano by za pomocą całkowania złożonego wzorem Villarcéau (dla $n = 4$) z krokiem d_2 .

Zadania

1. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3x}}$$

za pomocą ekstrapolacji Richardsona i metody Simpsona, przyjmując krok całkowania $d = 0,5$, a drugi raz $d = 0,25$.

Wskazówka: Przed przystąpieniem do liczenia należy usunąć osobliwość z całki, zamieniając $\sqrt{x}$ na t . Otrzymamy:

$$J = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t^4 + 3}} dt$$

Odpowiedź: $J = 1,120746$.

Wartość dokładna: $1,120713\dots$

Zauważmy – funkcja podcałkowa słabo zmienia się w przedziale całkowania od $2/\sqrt{3} \approx 1,155$ do 1, co tłumaczy dobrą dokładność przy sporym kroku całkowania. Gdybyśmy nie usunęli osobliwości w całce wyjściowej, nie dałoby się obliczyć jej numerycznie.

2. Całkę $\int_1^2 dx/x$ obliczono dwukrotnie za pomocą metody prostokątów. Dla $n_1 = 50$ kroków otrzymano wynik $J_1 = 0,693135$, natomiast dla $n_2 = 100$ kroków otrzymano wynik $J_2 = 0,693144$. Znaleźć trzecie przybliżenie za pomocą ekstrapolacji Richardsona.

Odpowiedź: $J = 0,693147$.

Wartość dokładna: $0,693147$. Obydwa wyniki są zgodne ze sobą.

3. Pewną całkę obliczono dwukrotnie za pomocą metody trapezów. Przy kroku d_1 otrzymano wynik T_1 , natomiast przy kroku d_2 otrzymano wynik T_2 . Wykazać, że trzecie przybliżenie otrzymane wg ekstrapolacji Richardsona:

$$S = \frac{4}{3} T_2 - \frac{1}{3} T_1$$

jest identyczne z wynikiem, jaki otrzymano by, stosując wzór Simpsona z krokiem d_2 .

Wskazówka: Wystarczy przeprowadzić obliczenia dla jednego podprzedziału o długości d_1 .

4. Pewną całkę obliczono dwukrotnie za pomocą metody Simpsona. Przy kroku d_1 otrzymano wynik S_1 , natomiast przy kroku d_2 otrzymano wynik S_2 . Wykazać, że trzecie przybliżenie otrzymane wg ekstrapolacji Richardsona:

$$R = \frac{16}{15} S_2 - \frac{1}{15} S_1$$

jest identyczne z wynikiem, jaki uzyskano by za pomocą całkowania złożonego wzorem Villarceau (dla $n = 4$) z krokiem d_2 . W s k a z ó k a: wystarczy przeprowadzić obliczenia dla jednego podprzedziału o długości d_1 .

§ 10. Metoda Romberga

Metoda Romberga, opublikowana w 1955 r. przez Wernera Romberga (1909–2003), jest uogólnieniem ekstrapolacji Richardsona. Uzasadnienie jej tkwi we wzorze (7.6), z błędem Δ w postaci Eulera-Maclaurina, jako szereg parzysty kroku całkowania d :

$$\Delta = a_1 d^2 + a_2 d^4 + a_3 d^6 + \dots$$

Zakłada się, że współczynniki rozwinięcia a_i nie zależą od kroku całkowania d . Wzór (7.6) możemy więc napisać w postaci:

$$J = T + a_1 d^2 + a_2 d^4 + a_3 d^6 + \dots, \quad (10.1)$$

gdzie J jest wartością całki, $T = d \Sigma y_i$ jest jej przybliżeniem wg wzoru trapezów, zaś szereg przedstawia błąd całkowania Δ . Współczynniki a_i są nieznane i trzeba je wyznaczyć.

Metoda Romberga polega na wielokrotnym obliczaniu całki metodą trapezów, za każdym razem z innym krokiem całkowania d i wyeliminowaniu kolejnych składników błędu. W równaniu (10.1) niewiadomymi są: wartość całki J oraz współczynniki rozwinięcia a_i . Zadanie to można by rozwiązać, układając układ równań ze względu na J oraz współczynniki rozwinięcia a_i , biorąc kolejne przybliżenia całki. Dużo prościej jednak jest wyznaczyć jej wartość, stosując schemat Romberga.

Biorąc dwa przybliżenia całki z krokiem d i $\frac{1}{2}d$, otrzymamy układ dwóch równań:

$$\begin{aligned} J &= T_1 + a_1 d^2 + a_2 d^4 + a_3 d^6 + \dots, \\ J &= T_2 + a_1 (\frac{1}{2}d)^2 + a_2 (\frac{1}{2}d)^4 + a_3 (\frac{1}{2}d)^6 + \dots, \end{aligned}$$

gdzie T_1 i T_2 to przybliżenia całki z krokiem d i $\frac{1}{2}d$, uzyskane metodą trapezów. Z układu tego możemy wyeliminować pierwszy składnik błędu, proporcjonalny do kwadratu kroku całkowania. Mnożąc drugie równanie przez 4 i odejmując pierwsze równanie, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 3J &= 4T_2 - T_1 + a_2 [4(\frac{1}{2}d)^4 - d^4] + a_3 [4(\frac{1}{2}d)^6 - d^6] + \dots, \\ J &= \frac{1}{3}(4T_2 - T_1) + \frac{1}{3}a_2 [4(\frac{1}{2}d)^4 - d^4] + \frac{1}{3}a_3 [4(\frac{1}{2}d)^6 - d^6] + \dots, \end{aligned}$$

równanie, które możemy napisać w postaci:

$$J = S_2 + b_2 (\frac{1}{2}d)^4 + b_3 (\frac{1}{2}d)^6 + \dots,$$

gdzie przybliżenie $S_2 \equiv \frac{1}{3}(4T_2 - T_1)$ jest identyczne z wynikiem, jaki otrzymano by stosując wzór Simpsona z krokiem $\frac{1}{2}d$ (patrz zadanie 3 na s. 46). Oznaczając $\frac{1}{2}d$ przez

d , równanie to można zapisać w postaci analogicznej do (10.1):

$$J = S + b_2 d^4 + b_3 d^6 + \dots,$$

gdzie J jest wartością całki, S jest jej przybliżeniem wg wzoru Simpsona z krokiem d , bez pierwszego elementu błędu, zaś szereg przedstawia błąd całkowania Δ .

Biorąc, jak poprzednio, dwa przybliżenia całki z krokiem d i $\frac{1}{2}d$, otrzymamy układ dwóch równań:

$$\begin{aligned} J &= S_1 + b_2 d^4 + b_3 d^6 + \dots, \\ J &= S_2 + b_2 (\tfrac{1}{2}d)^4 + b_3 (\tfrac{1}{2}d)^6 + \dots, \end{aligned}$$

gdzie S_1 i S_2 to przybliżenia całki z krokiem d i $\frac{1}{2}d$, uzyskane wcześniej metodą trapezów, tożsame ze wzorem Simpsona. Z układu tego możemy wyeliminować pierwszy składnik błędu, proporcjonalny do czwartej potęgi kroku całkowania. Mnożąc drugie równanie przez $4^2 = 16$ i odejmując pierwsze równanie, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 15J &= 16S_2 - S_1 + a_3 [16(\tfrac{1}{2}d)^6 - d^6] + \dots, \\ J &= \tfrac{1}{15}(16S_2 - S_1) + \tfrac{1}{15}a_3 [(\tfrac{1}{2}d)^6 - d^6] + \dots, \end{aligned}$$

równanie, które możemy napisać w postaci:

$$J = R_2 + c_3 (\tfrac{1}{2}d)^6 + \dots,$$

gdzie $R_2 \equiv \tfrac{1}{15}(16S_2 - S_1)$ jest identyczne z wynikiem, jaki otrzymano by stosując wzór Simpsona z krokiem $\frac{1}{2}d$ (patrz zadanie 4 na s. 46). Oznaczając $\frac{1}{2}d$ przez d , równanie to można zapisać w postaci analogicznej do (10.1):

$$J = R + c_3 d^6 + c_4 d^8 + \dots$$

gdzie J jest wartością całki, R jest jej przybliżeniem wg wzoru Villarceau (dla $n = 4$) z krokiem d , bez drugiego elementu błędu, zaś szereg przedstawia błąd całkowania Δ .

Postępowanie powyższe można kontynuować. Wyniki obliczeń przeprowadza się tabelarycznie (tabela 2). Kolejne przybliżenia całki zapisuje się w kolumnach, które tworzą tabelę (macierz). Oznaczmy przybliżenia metodą trapezów przez $T_{0,k}$. Przybliżenia bez pierwszego elementu błędu oznaczmy przez $T_{1,k}$, bez drugiego przez $T_{2,k}$, bez trzeciego – przez $T_{3,k}$ itd. Można ogólnie zapisać, że:

$$T_{m,k} = \frac{1}{4^m - 1} (4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}). \quad (10.2)$$

W tabeli 2 dana jest kolumna $T_{0,k} = d\Sigma'y_i$, przedstawiająca przybliżenia całki metodą trapezów. Równie dobrze mogą to być przybliżenia otrzymane metodą prostokątów (§ 15). Pozostałe wielkości obliczamy schematem Romberga wg wzoru (10.2).

Tab. 2. Schemat Romberga

	Σ'	$T_{0,k}$	$T_{1,k}$	$T_{2,k}$	$T_{3,k}$	$T_{4,k}$
$d/4^m$			4	16	64	256
d_0	Σ'_0	$T_{0,0}$				
$\frac{1}{2}d_0$	Σ'_1	$T_{0,1}$	$T_{1,0}$			
$\frac{1}{4}d_0$	Σ'_2	$T_{0,2}$	$T_{1,1}$	$T_{2,0}$		
$\frac{1}{8}d_0$	Σ'_3	$T_{0,3}$	$T_{1,2}$	$T_{2,1}$	$T_{3,0}$	
$\frac{1}{16}d_0$	Σ'_4	$T_{0,4}$	$T_{1,3}$	$T_{2,2}$	$T_{3,1}$	$T_{4,0}$

Powyższą tabelę można wypełniać albo kolumnami, albo wierszami. Obliczenia kończymy, gdy w dwóch kolejnych przybliżeniach pokrywają się cyfry dożądanego rzędu dokładności całki, albo gdy wyczerpane są wszystkie przybliżenia całki.

Elementy tabeli 2 podają przybliżone wartości całki, lecz z różną dokładnością. Kolumna zerowa zawiera przybliżenia całki metodą trapezów z coraz mniejszym krokiem całkowania, kolumna druga – przybliżenia wg wzoru Simpsona, zaś kolumna trzecia – wg wzoru Newtona-Cotesa dla $n = 4$. Dla $m > 2$ nie ma prostego związku pomiędzy $T_{m,k}$ i wzorami Newtona-Cotesa.

Dla funkcji z niezbyt szybko rosnącymi pochodnymi, ciąg wartości $T_{m,0}$, stojących na przekątnej w schemacie Romberga jest dużo szybciej zbieżny do prawdziwej wartości całki, niż ciąg przybliżeń $T_{m,k}$ w dowolnej kolumnie m . Na tym polega istota metody Romberga. Ale nie zawsze tak jest. Ciąg ten może być nawet rozbieżny.

Przy obliczaniu kolejnych przybliżeń $T_{0,k}$ wg wzoru trapezów można zmniejszyć liczbę działań przez wykorzystanie rzędnych funkcji z poprzedniego przybliżenia. Obliczenia rozpoczyna się od stabilizowania funkcji z najmniejszym zamierzonym krokiem całkowania. Nową Σ' obliczamy, dodając do poprzedniej Σ' rzędne w punktach pośrednich.

PRZYKŁAD 13. Obliczyć liczbę π daną całką $\frac{1}{4}\pi = \int_0^1 dx/(1+x^2)$ za pomocą metody Romberga, kończąc na kroku $d = \frac{1}{8}$.

R o z w i ą z a n i e. Najpierw tablicujemy funkcję podcałkową z najmniejszym przewidywanym krokiem całkowania, w tym wypadku z krokiem $d = \frac{1}{8}$.

x	y	x	y
0	1	$\frac{5}{8}$	64/89
$\frac{1}{8}$	64/65	$\frac{3}{4}$	6/25
$\frac{1}{4}$	16/17	$\frac{7}{8}$	64/113
$\frac{3}{8}$	64/73	1	1/2
$\frac{1}{2}$	4/5		

Wartości funkcji podane są w formacie ułamkowym, dla obliczeń nie ma to znaczenia.

Przybliżenia $T_{0,k}$ metodą trapezów liczby π wynoszą $4d\Sigma'$. Pierwsza Σ' z krokiem $d = 1$ równa się $\frac{1}{2}(1 + 0,5) = 0,75$. Drugą Σ' z krokiem $d = 0,5$ obliczamy, dodając do poprzedniej sumy 0,75 wartość rzędnej w pośrednim punkcie $x = 0,5$, otrzymując 1,55. Następną Σ' z krokiem $d = 0,25$ obliczamy, dodając do poprzedniej sumy 1,55 wartości rzędnych w pośred-

nich punktach w x równym 0,25 i 0,75. Wreszcie Σ' z krokiem $d = 0,125$ obliczamy analogicznie. Obliczenia przeprowadzamy tabelarycznie.

d	Σ'	$T_{0,k}$	$T_{1,k}$	$T_{2,k}$	$T_{3,k}$
			4	16	64
1	0,75	3			
0,5	1,55	3,1	3,133 3333		
0,25	3,131 1765	3,131 1765	3,141 5687	3,142 1177	
0,125	6,277 9770	3,138 9885	3,141 5925	3,141 5941	3,141 5858

Znając przybliżenia $T_{0,k}$, następne znajduje się wg wzoru (10.2). Na przykład przybliżenie w kolumnie $T_{2,k}$ dla $d = 0,125$ otrzymano następująco:

$$(16 \cdot 3,141 5925 - 3,141 5687)/15 = 3,141 5941.$$

Znajdując nowe przybliżenia można pominąć cyfry, które się powtarzają i wykonać działania wyłącznie na pozostałych cyfrach. Jest to problem analogiczny, jak w przypadku ekstrapolacji Richardsona.

Z dokładnością do siedmiu cyfr znaczących liczba $\pi = 3,141 5927$. Jak widać, w tym przypadku wartości na przekątnej w schemacie Romberga zbiegają wolniej do wartości dokładnej, niż przybliżenia w kolumnie $T_{1,k}$, odpowiadające metodzie Simpsona. Ale na ogół jest odwrotnie. Stąd szeroka popularność tej metody.

Zadania

1. Znane są przybliżenia $T_{0,k}$, otrzymane metodą trapezów dla całki $J = \int_1^2 dx/x$. Na podstawie tych danych znaleźć wartość dokładniejszą za pomocą metody Romberga. Przybliżenie $T_{0,0}$ zostało obliczone z krokiem $d = 1$.

$T_{0,k}$	$T_{1,k}$	$T_{2,k}$	$T_{3,k}$
	4	16	64
0,75			
0,708 333			
0,697 024			
0,694 122			

Z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku $\ln 2 = 0,693 147$.

2. W tabeli poniżej dane są wartości funkcji w przedziale $x \in (0,4, 1,6)$. Obliczyć jej całkę w podanym przedziale metodą Romberga, przyjmując za krok początkowy $d_0 = 0,4$.

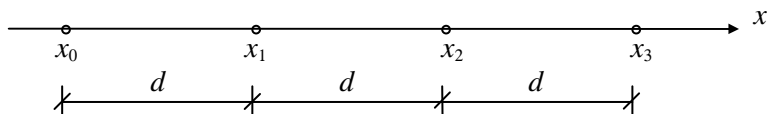
O d p o w i e d ź: $J = 1,8507$.

x	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	0,4942	0,7555	1,0523	1,3625	1,6542	1,889	2,0317
x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	
y	2,0629	1,9866	1,8274	1,6193	1,3937	1,1736	

§ 11. Wzory 5–8

Czasami zachodzi konieczność obliczenia całki funkcji pomiędzy dwiema rzędnymi dokładniej, niż pozwala na to wzór trapezów. Można to zrobić, jeśli np. wykorzystamy trzecią rzędną, mieszczącą się poza tymi dwiema w takim samym odstępzie. Taka sytuacja występuje wówczas, gdy funkcja jest stabilizowana w równych odstępach argumentu, a chcemy znać całkę tej funkcji pomiędzy dwiema sąsiednimi rzędnymi.

W celu znalezienia wzoru trzeba znaleźć mnożniki dla tych trzech rzędnych, co łatwo jest zrobić za pomocą układu (5.3) czy (5.7), znając położenie rzędnych.



Po wykonaniu działań otrzymamy wzór:

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \frac{2}{3} d \left(-\frac{1}{8} y_0 + y_1 + \frac{5}{8} y_2 \right) + \Delta_{-1}, \quad (11.1)$$

który nazywa się *lewostronnym* wzorem 5–8. W podobny sposób można otrzymać *pravostronny* wzór 5–8:

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \frac{2}{3} d \left(\frac{5}{8} y_1 + y_2 - \frac{1}{8} y_3 \right) + \Delta_{+1}. \quad (11.2)$$

Warto zauważyć, że mnożniki przy rzędnych nie są symetryczne, gdyż położenie rzędnych względem środka przedziału całkowania nie jest symetryczne. Jednakże przebieg ich jest identyczny w obydwu przypadkach, jeśli za punkt odniesienia rzędnych brać ich usytuowanie względem rzędnej dodatkowej. Mnożniki te są $-\frac{1}{8}$, 1 , $\frac{5}{8}$.

Czwarte równanie w układzie (5.3) dla $k = 3$ nie jest spełnione, zatem wzory 5–8 mają rząd dokładności równy 2, a więc zapewniają dokładne wartości całki z funkcji liniowych i kwadratowych. Wynika stąd, że błąd tych wzorów wyrazi się za pomocą trzeciej pochodnej. Stosując wzór (5.4) otrzymamy:

$$\Delta_{-1} = -\frac{d^4}{4!} y^{(3)}(\eta), \quad \Delta_{+1} = \frac{d^4}{4!} y^{(3)}(\eta).$$

Jak widać, jeden ze wzorów podaje wynik z niedomiarem, a drugi – z nadmiarem. Własność tę wykorzystuje się do jeszcze dokładniejszego obliczenia całki między dwiema rzędnymi, biorąc średnią arytmetyczną wzorów (11.1) i (11.2):

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \frac{2}{3} d \left(-\frac{1}{16} y_0 + \frac{13}{16} y_1 + \frac{13}{16} y_2 - \frac{1}{16} y_3 \right). \quad (11.3)$$

Wzór ten nazywa się *uśrednionym wzorem 5–8*. Jak widać, mnożniki mają tym razem przebieg symetryczny, bo rzędnebrane do obliczeń położone są symetrycznie względem środka przedziału całkowania. Wzór na błąd otrzymamy ze wzoru (5.4):

$$\Delta = \frac{11}{720} d^5 f^{(4)}(\eta). \quad (11.4)$$

Uśredniony wzór 5–8 ma więc rząd dokładności $m = 3$.

Łatwo sprawdzić, obliczając przedziałami całkę w granicach od x_0 do x_2 za pomocą prawo- i lewostronnego wzoru 5–8, że otrzymamy wzór Simpsona:

	x_0	x_1	x_2	
	○	○	○	→
	$\frac{5}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	
	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{5}{8}$	
c_{si}	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	Stąd:

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x) dx = \frac{2}{3} d \left(\frac{1}{2} y_0 + 2 y_1 + \frac{1}{2} y_2 \right).$$

Jeśli obliczymy całkę przedziałami w granicach od x_0 do x_3 za pomocą wzorów 5–8 prawostronnego, uśrednionego i lewostronnego, to otrzymamy następujący wzór:

	x_0	x_1	x_2	x_3	
	○	○	○	○	→
	$\frac{5}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$		
	$-\frac{1}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$-\frac{1}{16}$	
		$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{5}{8}$	
c_{si}	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{16}$	Stąd:

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \frac{2}{3} d \left(\frac{9}{16} y_0 + \frac{27}{16} y_1 + \frac{27}{16} y_2 + \frac{9}{16} y_3 \right). \quad (11.5)$$

Wyciągając $\frac{9}{16}$ przed nawias, można się przekonać za pomocą tabeli 1, że wzór (11.5) jest II wzorem Simpsona, który ma rząd dokładności $m = 3$.

Wzory 5–8 można wykorzystywać do całkowania złożonego. Aby zastosować w całym przedziale całkowania $\langle a, b \rangle$ uśredniony wzór 5–8, musimy znać dodatkowo jedną rzędną przed i jedną za przedziałem całkowania, wzięte w tym samym odstępzie, co rzędne wewnątrz przedziału. Postępując podobnie jak w poprzednich przykładach, po wykonaniu działań otrzymamy wzór:

$$\int_a^b y(x)dx = d \left(\frac{-y_{-1} + 12y_0 + 25y_1}{24} + \sum_{i=2}^{n-2} y_i + \frac{25y_{n-1} + 12y_n - y_{n+1}}{24} \right). \quad (11.6)$$

Wzór ten jest tożsamy ze wzorem trapezów z poprawką:

$$\int_a^b y(x)dx = d \left(\sum_{i=0}^n y_i - \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{24} + \frac{y_1 - y_{-1}}{24} \right),$$

gdzie $\sum y_i$ oznacza sumę rzędnych, w której pierwszą i ostatnią rzędną bierzemy ze współczynnikiem $\frac{1}{2}$. Uwzględniając, że różnice centralne wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \delta y_0 &\equiv \frac{1}{2}(y_1 - y_{-1}), \\ \delta y_n &\equiv \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1}), \end{aligned}$$

wzór (11.6) przyjmie ostatecznie postać:

$$\int_a^b f(x)dx = d \left(\sum_{i=0}^n y_i - \frac{\delta y_n - \delta y_0}{12} \right). \quad (11.7)$$

Błąd wzoru (11.7) dany jest wzorem (11.4). Dzięki tej prostej poprawce na końcach, rząd dokładności całkowania złożonego metodą trapezów wzrósł do $m = 3$.

Jeśli nie można wykorzystać rzędnych poza przedziałem całkowania $\langle a, b \rangle$, to można wykonać całkowanie złożone z jednokrotnym zastosowaniem wzorów Simpsona na końcach przedziału całkowania, a w pozostałych podprzedziałach – uśredniony wzór 5–8. Po wykonaniu działań otrzymamy wzór trapezów z inną formą poprawki:

$$\int_a^b f(x)dx = d \left(\frac{8y_0 + 31y_1 + 20y_2 + 25y_3}{24} + \sum_{i=4}^{n-4} y_i + \frac{25y_{n-3} + 20y_{n-2} + 31y_{n-1} + 8y_n}{24} \right). \quad (11.8)$$

Po prostych przekształceniach wzór (11.8) przyjmie postać wzoru trapezów z poprawką:

$$\int_a^b f(x)dx = d \left(\frac{-4y_0 + 7y_1 - 4y_2 + y_3}{24} + \sum_{i=4}^n y_i + \frac{y_{n-3} - 4y_{n-2} + 7y_{n-1} - 4y_n}{24} \right). \quad (11.9)$$

Poprawka ta nieznacznie różni się od poprawki (9.2) – patrz zadanie 1, poniżej.

Wzory 5–8 znajdują zastosowanie do uzupełniania całkowania złożonego metodą Simpsona, gdy przedział całkowania $\langle a, b \rangle$ jest podzielony na nieparzystą liczbę odstępów między rzędnymi, a także do obliczania krzywej całkowej z krokiem d (wzór Simpsona daje możliwość obliczania krzywej całkowej z krokiem $2d$).

Zadania

1. Dane są cztery rzędne y_0, y_1, y_2, y_3 w równoodległych punktach x_0, x_1, x_2, x_3 . Określić nacylenie krzywej w punkcie x_0 , przechodzącej przez te punkty.

R o z w i ą z a n i e. Początek lokalnego układu przyjmujemy w punkcie x_0 . Krzywą aproksymujemy wielomianem 3. stopnia $y = at^3 + bt^2 + ct + d$. Nachylenie krzywej w punkcie x_0 określa pierwsza pochodna y w punkcie $t = 0$, czyli współczynnik c . Musimy więc wyznaczyć współczynniki wielomianu, układając cztery równania na rzędne:

$$\begin{aligned}y_0 &= d, \\y_1 &= ah^3 + bh^2 + ch + d, \\y_2 &= a(2h)^3 + b(2h)^2 + c2h + d, \\y_3 &= a(3h)^3 + b(3h)^2 + c3h + d,\end{aligned}$$

gdzie h jest odstępem między rzędnymi. Wyznaczając kolejne różnice $\Delta y = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y = y_2 - y_1$, $\Delta^3 y = y_3 - y_2$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\Delta y &= ah^3 + bh^2 + ch, \\ \Delta^2 y &= a(2h)^3 + b(2h)^2 + c2h, \\ \Delta^3 y &= a(3h)^3 + b(3h)^2 + c3h.\end{aligned}$$

Stąd: $6h^3a = \Delta^3 y - 3\Delta^2 y + 3\Delta y$, $2h^2b = -\Delta^3 y + 4\Delta^2 y - 5\Delta y$, $ch = \frac{1}{3}\Delta^3 y - \frac{3}{2}\Delta^2 y + 3\Delta y$.
Zatem: $y'|_{t=0} = c = (3\Delta y - \frac{3}{2}\Delta^2 y + \frac{1}{3}\Delta^3 y)/h = (\frac{11}{6}y_0 + 3y_1 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3)/h$. Podstawiając do wzoru (9.2) na dolną poprawkę, otrzymamy:

$$(\Delta_p)_0 = \frac{1}{24}h\left(-\frac{11}{3}y_0 + 6y_1 - 3y_2 + \frac{2}{3}y_3\right).$$

Widzimy, że poprawka ta nieco różni się od tej danej wzorem (11.9), co jest zrozumiałe ze względu na różny rząd dokładności uśrednionego wzoru 5–8 i wzorów 5–8.

2. Obliczyć numerycznie całki (w Excelu lub tabelarycznie):

$$P = \int_0^{0.6} \sqrt{1-x^2} dx \qquad Q = \int_0^{0.8} \sqrt{1-x^2} dx$$

za pomocą wzoru trapezów z poprawką, przyjmując krok całkowania $d = 0,1$, a następnie przy pomocy liczb P i Q wyznaczyć pole koła o promieniu 1.

R o z w i ą z a n i e. Gdybyśmy obliczyli całkę w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, otrzymalibyśmy pole ćwiartki koła. Tak jednak postąpić nie możemy, gdyż funkcja podcałkowa nie ma charakteru wielomianu – w punkcie $x = 1$ posiada styczną pionową. Otrzymalibyśmy wówczas wynik z dużym błędem. Do całkowania takich funkcji używa się funkcji z wagą $\theta(x)$. Chcemy obejść ten problem, obliczając całki P i Q .

Metoda trapezów daje wyniki:

$$P = 0,561\,126 \qquad Q = 0,702\,541.$$

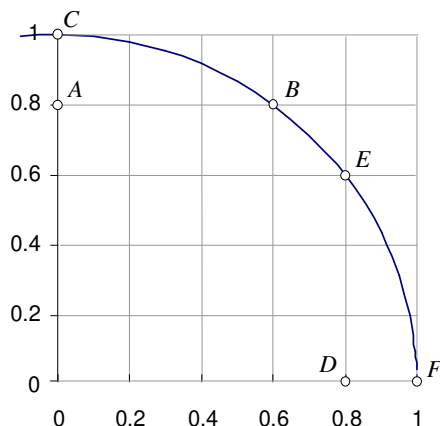
Poprawka dana jest wzorem: $\Delta_p = (d^2/12)x/y$. Wartości poprawek wynoszą:

$$\Delta_P = 0,000\,625 \qquad \Delta_Q = 0,001\,111.$$

Wartości całek z uwzględnieniem poprawek wynoszą:

$$P = 0,561\,751$$

$$Q = 0,703\,652.$$



Rys. 4. Ćwiartka koła

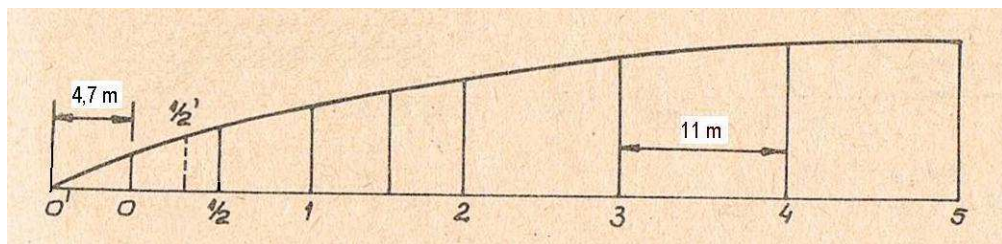
Aby obliczyć pole całej ćwiartki koła, zauważmy, że pola odcinków ABC i DEF są takie same (rys. 4). Pole odcinka ABC równa się:

$$P - 0,6 \cdot 0,8 = P - 0,48 = 0,081\,751.$$

Pole ćwiartki koła równa się $Q + (P - 0,48) = 0,785\,403$. Pole całego koła równa się więc $\pi = 4(P + Q - 0,48) \approx 3,141\,612$. Trzy ostatnie cyfry powinny wynosić 593. Gdybyśmy pola P i Q obliczyli metodą Simpsona z krokiem $d = 0,1$, otrzymalibyśmy gorszy wynik.

§ 12. Uogólniony wzór paraboliczny

Wzory 5–8 pozwalają obliczyć całkę między dwiema rzędnymi dokładniej, niż pozwala na to wzór trapezów. W tym celu musimy mieć podaną dodatkową rzędną w odstępnie kroku d na lewo lub prawo od obu rzędnych. Zdarzają się jednak sytuacje, zwłaszcza na końcach przedziału całkowania, gdy ta dodatkowa rzędna nie jest w odległości d (rys. 5).



Rys. 5

Dawniej radzono sobie w ten sposób, że wprowadzano połówkową rzędną $\frac{1}{2}$, której wartość odczytywano z rysunku. Wtedy pole pomiędzy rzędną 0' i 1 można obliczyć wzorem Simpsona. W dobie obecnej nie lubimy odczytów analogowych. Zatem przydałby się wzór pozwalający na numeryczne obliczenie całki, gdy rzędne nie są rozstawione z równym krokiem.

W tym celu musimy wyprowadzić wzór na numeryczne obliczanie całki:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = h(H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2) \quad (12.1)$$

w oparciu o trzy rzędne, gdzie rzędna y_1 umiejscowiona jest w dowolnym miejscu wewnątrz czy na zewnątrz przedziału całkowania.

Położenie rzędnych jest zadane, do wyznaczenia są mnożniki. Początek lokalnego układu przyjmujemy w dolnej granicy całkowania x_0 . Odcięte rzędnych w układzie lokalnym wynoszą: $t_0 = 0$, $t_1 = x_1 - x_0$, $t_2 = x_2 - x_0 \equiv h$. Bezwymiarowe odcięte, odniesione do h , wynoszą: $\bar{t}_0 = 0$, $\bar{t}_1 = t_1/h \equiv R$, $\bar{t}_2 = 1$. Podstawiając je do układu (5.7), otrzymamy liniowy układ na mnożniki:

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 + H_2 &= 1, \\ RH_1 + H_2 &= \frac{1}{2}, \\ R^2 H_1 + H_2 &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

z którego wynika, że R nie może być równe 0 ani 1. Rozwiązanie układu jest elementarne. Otrzymamy:

$$H_1 = \frac{1}{6R(1-R)}, \quad H_2 = \frac{2-3R}{6(1-R)} y_2, \quad H_0 = \frac{-1+3R}{6R}. \quad (12.2)$$

Otrzymaliśmy te same wyniki, co w zadaniu 2 na s. 22 metodą Lagrange'a, lecz dużo łatwiej i szybciej. Wzór (12.1) z powyższymi mnożnikami jest *uogólnionym wzorem parabolicznym*. Można pokazać, że gdy $R = -1$, otrzymamy lewostronny wzór 5–8, gdy $R = \frac{1}{2}$, otrzymamy wzór Simpsona, gdy $R = 2$, otrzymamy prawostronny wzór 5–8.

Wzór jest szczególnie użyteczny, gdy rzędne są rozstawione z nierównym krokiem. Przykładowo, na rys. 5 możemy obliczyć pole między rzędną 0' i $\frac{1}{2}$, stosując wzór (12.1), w którym długość przedziału całkowania $h = 4,7 + 5,5 = 10,2$ m, a mnożniki dla rzędnych y_0 , y_0 i $y_{\frac{1}{2}}$, odpowiadające $R = 4,7/10,2 = 0,46$, wynoszą: $H_0 = 0,138$, $H_0 = 0,671$, $H_{\frac{1}{2}} = 0,191$. Przypadek obliczeń, gdy dodatkowa rzędna jest *wewnątrz* przedziału całkowania, można uważać za uogólnienie wzoru Simpsona.

Gdybyśmy chcieli obliczyć pole między rzędną 0' i 0, stosujemy wzór (12.1), w którym $h = 4,7$ m, a mnożniki dla rzędnych y_0 , y_0 oraz $y_{\frac{1}{2}}$, odpowiadające $R = 10,2/4,7 = 1/0,46 = 2,174$, wynoszą: $H_0 = 0,423$, $H_0 = 0,642$, $H_{\frac{1}{2}} = -0,065$. Przypadek obliczeń, gdy dodatkowa rzędna jest na *zewnątrz* przedziału całkowania można uważać za uogólnienie prawostronnego wzoru 5–8. W obu przypadkach wykorzystane są te same trzy rzędne.

§ 13. Obliczanie krzywych całkowych

Krzywa całkowa jest to całka oznaczona, będąca funkcją górnej (lub dolnej) granicy całkowania, np.:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Inaczej mówiąc, krzywa całkowa $F(x)$ jest to funkcja pierwotna w stosunku do funkcji podcałkowej, przyjmująca wartość zerową w punkcie $x = a$.

Aby wyznaczyć krzywą całkową $F(x)$, przedział $\langle a, b \rangle$ należy podzielić na dowolną liczbę części o jednakowej długości d , na końcach których trzeba znać wartości funkcji podcałkowej (rzędne). Funkcję całkową $F(x)$ można określić jedynie poprzez ciąg jej wartości podanych w punktach x przybierających wartości $x_0 = a$, $x_1 = a + d$, $x_2 = a + 2d$, ... oraz $x_n \equiv b = a + nd$, gdzie $d = (b - a)/n$ jest odstępem między rzędnymi.

Wartości funkcji $F(x)$ określa się poprzez obliczanie jej kolejnych przyrostów, mianowicie:

$$F(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Zatem:

$$F(x_i) = F(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13.1)$$

dla $i = 0$, $F(x_0) = 0$. Przy obliczaniu całek w kolejnych podprzedziałach można posługiwać się wzorem trapezów lub którymkolwiek spośród wzorów 5–8. Tak więc:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} d (y_{i-1} + y_i) = \frac{1}{2} d S_i \\ \frac{2}{3} d \left(\frac{5}{8} y_{i-1} + y_i - \frac{1}{8} y_{i+1} \right) = \frac{2}{3} d S_i \\ \frac{2}{3} d \left(-\frac{1}{8} y_{i-2} + y_{i-1} + \frac{5}{8} y_i \right) = \frac{2}{3} d S_i \\ \frac{2}{3} d \cdot \frac{13}{16} \left(-\frac{1}{13} y_{i-2} + y_{i-1} + y_i - \frac{1}{13} y_{i+1} \right) = \frac{13}{24} d S_i \end{cases}$$

w zależności od zastosowanego wzoru. S_i jest wyrażeniem zawartym w nawiasie, zaś d jest odstępem między rzędnymi. Stosując całkowanie złożone we wzorze (13.1) oraz wyciągając wspólny czynnik przed nawias, krzywą całkową da się przedstawić w postaci:

$$F(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} d \Sigma_i \\ \frac{2}{3} d \Sigma_i \\ \frac{13}{24} d \Sigma_i \end{cases} \quad (13.2)$$

w zależności od zastosowanego wzoru, przy czym:

$$\Sigma_i = \Sigma_{i-1} + S_i = \sum_{j=1}^i S_j \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczanie kolejnych Σ_i jest proste, jeśli obliczenia przeprowadza się tabelarycznie lub w arkuszu kalkulacyjnym. Początkowa wartość Σ_0 z definicji jest równa zero.

PRZYKŁAD 14. Obliczyć krzywą całkową funkcji $l(\phi)$ zadanej tabelarycznie za pomocą:

- wzoru trapezów,
- prawostronnego wzoru 5–8,
- uśrednionego wzoru 5–8.

ϕ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
$l(\phi)$	0	0,087	0,237	0,318	0,325	0,270	0,172	0,050

R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa stablicowana jest z krokiem $d = 10^\circ = \pi/18$, i z takim krokiem będzie całkowana. Krzywa całkowa określona jest wzorem:

$$l_d = \int_0^\phi l(\theta) d\theta.$$

Obliczenia przeprowadzamy tabelarycznie lub z pomocą arkusza kalkulacyjnego.

a) Zastosowanie wzoru trapezów.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
ϕ_i	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
l_i	0	0,087	0,237	0,318	0,325	0,270	0,172	0,050
Σ_i	0	0,087	0,411	0,966	1,609	2,204	2,646	2,868
l_d	0	0,008	0,036	0,084	0,140	0,192	0,231	0,250

Sposób obliczania kolejnych Σ_i zaznaczony jest w tablicy strzałkami.

$$l_d = \frac{1}{2} d \Sigma_i = \frac{\pi}{36} \Sigma_i = 0,08727 \Sigma_i.$$

b) Zastosowanie prawostronnego wzoru 5–8.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
ϕ_i	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
$\frac{5}{8}l_i$	0	0,054	0,148	0,199	0,203	0,169	0,107	0,031
l_i	0	0,087	0,237	0,318	0,325	0,270	0,172	0,050
$-\frac{1}{8}l_i$	0	-0,011	-0,030	-0,040	-0,041	-0,034	-0,021	-0,006
Σ_i	0	0,057	0,308	0,733	1,223	1,675	2,010	2,179
l_d	0	0,007	0,036	0,085	0,142	0,195	0,234	0,254

Sposób obliczania kolejnych Σ_i zaznaczony jest w tablicy strzałkami.

$$l_d = \frac{2}{3} d \Sigma_i = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{18} \Sigma_i = \frac{\pi}{27} \Sigma_i = 0,1164 \Sigma_i.$$

Z uwagi na brak rzędnej dla $\phi = 80^\circ$, ostatni przyrost krzywej całkowej musieliśmy obliczyć lewostronnym wzorem 5–8.

c) Zastosowanie uśrednionego wzoru 5–8.

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
ϕ_i	-10°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
l_i	-0,087	0	0,087	0,237	0,318	0,325	0,270	0,172	0,050
$-\frac{1}{13}l_i$	0,007	0	-0,007	-0,018	-0,024	-0,025	-0,021	-0,013	-0,004
Σ_i		0	0,076	0,376	0,899	1,503	2,062	2,475	
l_d		0	0,007	0,036	0,085	0,142	0,195	0,234	0,254

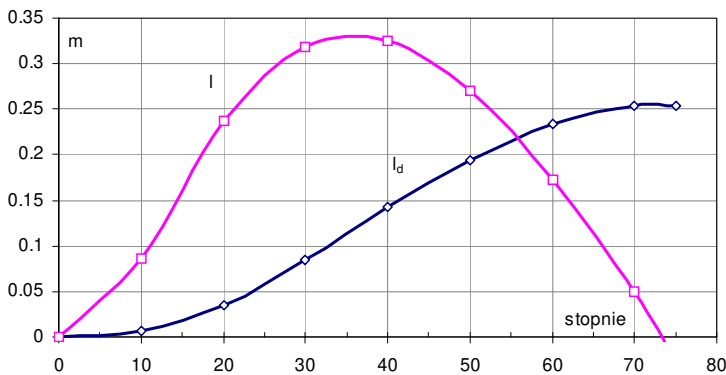
Pierwsza kolumna w tablicy dla $\phi = -10^\circ$ wynika z niesymetryczności funkcji podcałkowej. W tablicy strzałkami zaznaczono wyznaczanie kolejnych Σ_i .

$$l_d = \frac{13}{24} d \Sigma_i = \frac{13}{24} \cdot \frac{\pi}{18} \Sigma_i = 0,0945 \Sigma_i.$$

Z uwagi na brak rzędnej dla $\phi = 80^\circ$, ostatni przyrost krzywej całkowej trzeba obliczyć lewostronnym wzorem 5–8.

Jak widać z przeprowadzonych obliczeń, wzór trapezowy daje zaniżone wartości krzywej całkowej w stosunku do wzorów 5–8, w przybliżeniu o trzy jednostki na trzecim miejscu po przecinku. Wzory 5–8 dają praktycznie identyczne wyniki.

Wykres funkcji podcałkowej oraz krzywej całkowej pokazany jest na rys. 6.



Rys. 6. Krzywa całkowca

Krzywa całkowa pokazuje, jak zmienia się pole pod krzywą podcałkową, poczynając od punktu początkowego, w tym przypadku od $\phi = 0$. Krzywa podcałkowa jest pochodną krzywej całkowej. W miejscach, gdzie funkcja podcałkowa zeruje się, styczna do krzywej całkowej jest pozioma, tj. miejsca zerowe krzywej podcałkowej wyznaczają ekstrema krzywej całkowej. Na rys. 6 wypadają one dla kąta $\phi = 0$ i $\phi \approx 74^\circ$. Z kolei w punkcie, gdzie krzywa podcałkowa osiąga maksimum, styczna do krzywej całkowej osiąga największe nachylenie, tj. maksimum krzywej podcałkowej wyznacza punkt *przebiecia* krzywej całkowej. Na rys. 6 maksimum krzywej podcałkowej i punkt przebiecia krzywej całkowej wypadają dla kąta $\phi \approx 35^\circ$.

Zadanie

1. Obliczyć przyrost krzywej całkowej z przykładu na s. 58, jeśli dla kąta $\phi = 75^\circ$ znana jest wartość funkcji podcałkowej $l_{75^\circ} = -0,028$ m.

R o z w i ą z a n i e. Przyrost ten można obliczyć wzorem trapezów:

$$\Delta l_d = \frac{1}{2}(l_{70^\circ} + l_{75^\circ}) \cdot 5/57,3 = 1,0 \text{ mm.}$$

Dokładniejszy wynik otrzymamy, stosując uogólniony wzór paraboliczny. Dodatkowa rzędna l_{60° jest w odległości -10° (na lewo) od rzędnej początkowej l_{70° . Zatem względna odległość dodatkowej rzędnej od rzędnej początkowej $R = -10^\circ/5^\circ = -2$. Stosując wzór (12.2) na mnożniki, otrzymamy:

$$H_1 = -1/36, \quad H_0 = 7/12, \quad H_2 = 4/9.$$

Przyrost pola Δl_d dany jest wzorem (12.1), w którym długość przedziału całkowania $h = 5^\circ$, wyrażona w radianach. Zatem:

$$\Delta l_d = (5/57,3)(H_1 l_{60^\circ} + H_0 l_{70^\circ} + H_2 l_{75^\circ}) = 0,2 \text{ mm.}$$

Obie wielkości są małe, trudne do odróżnienia w skali rysunku, jednak różnica jest wyraźna.

§ 14. Wzory Czebyszewa

Wzory (5.8) na numeryczne wyznaczanie całek, w których mnożniki H_i są jednakowe, nazywają się *wzorami Czebyszewa*. Aby można było stosować te wzory, trzeba mieć wykres funkcji podcałkowej bądź przepis funkcyjny.

Stosując numerację węzłów i mnożników od 1 do n (n oznacza liczbę rzędnych w obrębie jednego podprzedziału), z pierwszego równania dla $k = 0$ w układzie (5.3), otrzymamy:

$$\sum_i H_i = 1,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich rzędnych, od $i = 1$ do n . Ponieważ $H_i = \text{const} \equiv H$, stąd $H = 1/n$. Uwzględniając ten wynik we wzorze (5.8), otrzymamy ogólną

postać wzorów Czebyszewa:

$$\int_a^b f(x) dx = h \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \Delta. \quad (14.1)$$

Zatem obliczenie całki oznaczonej metodą Czebyszewa w obrębie jednego podprzedziału sprowadza się do pomnożenia długości podprzedziału przez *średnią arytmetyczną* rzędnych, a nie przez średnią ważoną, jak to jest we wzorze (5.8). Aby tak można było postąpić, rzędne brane do obliczeń muszą być tzw. rzędnymi Czebyszewa, których położenie określa układ (5.2) czy (5.3), przy warunku jednakowych mnożników rzędnych $H_i = H = 1/n$. W tym przypadku układ ten przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^n t_i^k = \begin{cases} 0 & k = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{n}{k+1} & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, \quad (14.2)$$

gdzie bezwymiarowe $t_i = l_i / \frac{1}{2}h$, l_i jest odległością od środka podprzedziału, zaś $h = b - a$ jest długością podprzedziału; bezwymiarowe t_i odnoszone są do promienia podprzedziału $\frac{1}{2}h$. Z układu (14.2) wynika, że rzędne Czebyszewa położone są symetrycznie względem środka podprzedziału, a ich położenie zależy wyłącznie od liczby rzędnych n .

Rozwiązaniem układu (14.2) są liczby algebraiczne. Rozwiązania istnieją tylko dla $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ i 9 (te same liczby dotyczą warunku, by $H_i > 0$ we wzorach Newtona-Cotesa). Rozwiązanie dla $n = 1, 2, 3, 4$ i 5 nie wykracza poza poziom szkoły średniej. Dla $n = 6$ i 7 układ (14.2) sprowadza się do rozwiązania jednego równania trzeciego stopnia (patrz zadanie 4), a dla $n = 9$ – czwartego stopnia. Przy rozwiązywaniu układu (14.2) w pierwszym rzędzie należy wykorzystać własność symetrii węzłów t_i , przez co liczba niewiadomych zmniejsza się o połowę. Do ich wyznaczenia wystarczy wziąć równania niejednorodne, dla k parzystych. Rząd dokładności wzorów Czebyszewa m , równy maksymalnej wartości k w układzie równań, dany jest wzorem (6.2).

W tabeli 3 podane są bezwymiarowe położenia węzłów Czebyszewa t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pochodzące z rozwiązania układu (14.2) dla poszczególnych n , a także podana jest stała c :

$$c = \frac{2}{(m+1)!} \left[\frac{1}{m+2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{m+1} \right]$$

występująca we wzorze na błąd metody Δ , określony wzorem (5.4). Z pomocą tej stałej, błąd całkowania Δ w jednym podprzedziale wyraża się wzorem:

$$\Delta = c(h/2)^{m+2} f^{(m+1)}(\eta). \quad (14.3)$$

Podobnie jak w przypadku wzorów Newtona-Cotesa, nie jest wskazane stosowanie wzorów Czebyszewa o wysokich n do całkowania funkcji niebędących wielomianami. Najlepsze rezultaty osiąga się, stosując całkowanie złożone przy pomocy dwóch pierwszych wzorów. Warto przy tym wiedzieć, że przy zastosowaniu całkowania złożonego

wzorami Czebyszewa o tym samym rzędzie dokładności, bardziej dokładne są wzory o parzystej liczbie rzędnych. Przy założeniu, że w obu przypadkach do obliczeń brana jest ta sama liczba rzędnych, błąd całkowania złożonego Δ przy zastosowaniu wzorów o nieparzystej liczbie rzędnych jest prawie dwukrotnie większy niż w przypadku wzorów o parzystej liczbie rzędnych (patrz zadanie 2). Wzory Czebyszewa są nieco dokładniejsze od wzorów Newtona-Cotesa o takim samym rzędzie dokładności – patrz zadanie 3.

Tab. 3. Położenie węzłów t_i , rząd dokładności m oraz błąd Δ wzorów Czebyszewa

n	m	i	$t_i = l_i/2h$	Stała c
1	1	1	0	$\frac{1}{3}$
2	3	1, 2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,5774$	$\frac{1}{135}$
3	3	1, 3	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,7071$	$\frac{1}{360}$
		2	0	
4	5	1, 4	$\pm \sqrt{(5+2\sqrt{5})/15} \approx \pm 0,7947$	$\frac{2}{42525}$
		2, 3	$\pm \sqrt{(5-2\sqrt{5})/15} \approx \pm 0,1876$	
5	5	1, 5	$\pm \sqrt{(5+\sqrt{11})/12} \approx \pm 0,8325$	$\frac{13}{544320}$
		2, 4	$\pm \sqrt{(5-\sqrt{11})/12} \approx \pm 0,3745$	
		3	0	
6	7	1, 6	$\pm 0,866\,246\,818\,11$	$\frac{1}{3\,969\,000}$
		2, 5	$\pm 0,422\,518\,653\,78$	
		3, 4	$\pm 0,266\,635\,401\,51$	
7	7	1, 7	$\pm 0,883\,861\,700\,75$	$\frac{281}{1\,959\,552\,000}$
		2, 6	$\pm 0,529\,656\,775\,31$	
		3, 5	$\pm 0,323\,911\,810\,46$	
		4	0	
9	9	1, 9	$\pm 0,911\,589\,307\,74$	$6,063 \cdot 10^{-10}$
		2, 8	$\pm 0,601\,018\,655\,17$	
		3, 7	$\pm 0,528\,761\,783\,33$	
		4, 6	$\pm 0,167\,906\,184\,06$	
		5	0	

Gdy długość każdego podprzedziału jest taka sama i w każdym podprzedziale zastosowany jest ten sam wzór Czebyszewa o n rzędnych, to obliczenie całki jest następujące:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^p \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x)dx = \sum_{j=1}^p h \sum_{i=1}^n f(x_{ij}) = \frac{h}{n} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n f(x_{ij}),$$

gdzie p jest liczbą podprzedziałów, $h = (b - a)/p$ jest długością jednego podprzedziału, n jest liczbą rzędnych w jednym podprzedziale, x_{ij} jest odciętą i -tego węzła w j -tym podprzedziale, x_j jest odciętą środka j -tego podprzedziału.

Podstawiając za $h = (b - a)/p$, otrzymamy ostatecznie:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \frac{1}{pn} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n f(x_{ij}), \quad (14.4)$$

gdzie pn jest liczbą wszystkich rzędnych wziętych do obliczeń. Ze wzoru (14.4) wiadać, że zastosowanie całkowania złożonego metodą Czebyszewa sprowadza się do pomnożenia średniej arytmetycznej wszystkich rzędnych Czebyszewa przez długość przedziału całkowania. Przy dwukrotnym wykonaniu obliczeń tej samej całki tym samym wzorem, lecz o różnej liczbie podprzedziałów p_1 i p_2 , do otrzymanych wyników można zastosować ekstrapolację Richardsona.

Błąd całkowania złożonego o jednakowej długości podprzedziałów równa się $\Delta = p\Delta_1$, gdzie Δ_1 jest błędem w jednym podprzedziale, danym wzorem (14.3). Podstawiając za $h = (b - a)/p$, otrzymamy ostatecznie błąd całkowania złożonego:

$$\Delta = \frac{c}{p^{m+1}} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+2} f^{(m+1)}(\eta), \quad (14.5)$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$, a stała c podana jest w tabeli 3.

PRZYKŁAD 15. Obliczyć numerycznie liczbę π daną za pomocą całki: $\frac{1}{4}\pi = \int_0^1 dx/(1+x^2)$ za pomocą trzykrotnego zastosowania wzoru Czebyszewa o dwóch rzędnych.

R o z w i ą z a n i e. Liczba podprzedziałów $p = 3$, stąd długość jednego podprzedziału $h = (b - a)/p = \frac{1}{3}$, promień podprzedziału $h/2 = \frac{1}{6}$. Odcięte środków podprzedziałów wynoszą:

$$x_1 = h/2 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = x_1 + h = \frac{1}{2}, \quad x_3 = x_2 + h = \frac{5}{6}.$$

W każdym podprzedziale odcięte węzłów oblicza się ze wzoru:

$$x_{ij} = x_j \pm \frac{1}{2}h/\sqrt{3} = x_j \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}, \text{ dla } j = 1, 2, 3.$$

ij	x_{ij}	$y_{ij} = 1/(1+x_{ij}^2)$
11	0,070 442	0,995 062
21	0,262 892	0,935 356
12	0,403 775	0,859 820
22	0,596 225	0,737 744
13	0,737 108	0,647 950
23	0,929 558	0,536 458
$\Sigma =$		4,712 390

Stąd: $\pi = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 4,712\,390 = 3,141\,593$.

Dla porównania dokładna wartość $\pi = 3,1415926\dots$, a więc otrzymaliśmy wynik z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku. Podobne obliczenie wykonane przy pomocy jednokrotnego zastosowania wzoru Czebyszewa o sześciu rzędnych daje wartość $\pi = 3,141\,610$, która jest gorsza od poprzedniej. Należy przyjąć to za regułę. Zwykle przy całkowaniu funkcji niebędących wielomianami, wzory o wysokich n (wysokich rzędach dokładności) dają gorsze wyniki niż całkowanie złożone o niskich rzędach dokładności, tj. o małej liczbie rzędnych w jednym podprzedziale.

Błądu metody nie będziemy tu szacowali, gdyż wyraża się za pomocą czwartej pochodnej funkcji podcałkowej, której obliczenie jest kłopotliwe.

UWAGA. Podawane w literaturze okrętowej położenie rzędnych Czebyszewa dla 8, 10, 12 i więcej liczby rzędnych odpowiada faktycznie położeniu rzędnych, jakie otrzymamy przy dwukrotnym stosowaniu wzoru Czebyszewa o 4, 5, 6 itd. rzędnych. Najlepsze jednak rezultaty (patrz Przykład 15) uzyskuje się stosując po dwa rzędne Czebyszewa w każdym podprzedziale.

Zadania

1. Obliczyć całkę $J = \int_0^1 x dx / (1+x)$ za pomocą 3-krotnego zastosowania wzoru Czebyszewa o dwóch rzędnych.

R o z w i ą z a n i e. Odcięte rzędnych podane są w przykładzie na s. 63 – położenie rzędnych jest bowiem niezależne od całkowanej funkcji.

ij	x_{ij}	$y_{ij} = x_{ij}/(1+x_{ij})$
11	0,070 442	0,065 806
21	0,262 892	0,208 166
12	0,403 775	0,287 635
22	0,596 225	0,373 522
13	0,737 108	0,424 331
23	0,929 558	0,481 747
	$\Sigma =$	1,841 207

Stąd, $J = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,841\,207 = 0,306\,868$. Dla porównania dokładna wartość całki $J = 1 - \ln 2 = 0,306\,853$. W obliczeniu numerycznym dokładne są więc 4 pierwsze cyfry po przecinku. Błąd wynosi $\Delta = 0,306\,853 - 0,306\,868 = -0,000\,015$.

Błąd oszacujemy wg wzoru (14.5). Rząd dokładności zastosowanego wzoru $m = 3$. Funkcja podcałkowa $f(x) = x/(1+x) = 1 - 1/(1+x) = 1 - (1+x)^{-1}$. Obliczanie jej pochodnych jest proste. Czwarta pochodna $f^{(4)}(x) = (-2)(-3)(-4)(1+x)^{-5} = -24/(1+x)^5$. W przedziale całkowania $f^{(4)}(x) \in \langle -24, -0,75 \rangle$. Zatem błąd Δ równa się:

$$\Delta = \frac{1}{135} \left(\frac{1}{3} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right)^5 \langle -24, -0,75 \rangle = \langle -0,000\,069, -0,000\,002 \rangle.$$

Widzimy, że błąd Δ zawiera się w przedziale błędu.

Dla porównania, gdy podaną całkę obliczymy za pomocą 2-krotnego zastosowania wzoru Czebyszewa o trzech rzędnych, otrzymamy wynik $J = 0,306880$. Błąd wynosi teraz $\Delta = 0,306853 - 0,306880 = -0,000027$; jest zatem większy $27/15 = 1,8$ raza, niż w poprzednim przypadku. Zgodne jest to z rozważaniami teoretycznymi podanymi w zadaniu 2.

2. Zbadać błędy całkowania dla wzorów Czebyszewa dla $n = 2$ i 3 oraz 4 i 5 .

R o z w i ą z a n i e. Wzory Czebyszewa dla $n = 2$ i 3 mają ten sam rząd dokładności $m = 3$. Błąd w jednym przedziale dla $n = 2$ dany jest wzorem (14.3):

$$\Delta_2 = -1/_{135}(h/2)^5 f^{(4)}(\eta),$$

a dla $n = 3$ wzorem:

$$\Delta_3 = -1/_{360}(h/2)^5 f^{(4)}(\eta).$$

Biorąc stosunek obydwu błędów oraz zakładając, że długość przedziału h oraz punkt η w obu przypadkach są takie same, otrzymamy:

$$\Delta_3/\Delta_2 = 135/_{360} \approx 3/8 = 0,375.$$

Błąd Δ_3 jest *mniejszy* od Δ_2 , czyli wzór o trzech rzędnych jest dokładniejszy, niż wzór o dwóch rzędnych w przedziale o *takiej samej* długości. Analogicznie, wzory o 4 i 5 rzędnych mają ten sam rząd dokładności $m = 5$. Stąd:

$$\Delta_5/\Delta_4 = 13/_{544320} 42525/2 \approx 0,508.$$

Sprawdźmy, jak będą wyglądały błędy obliczeń całkowania złożonego o tej samej liczbie rzędnych i tej samej długości przedziału całkowania dla wzorów o $n = 2$ i 3 . W takim przypadku wystarczy wziąć najmniejszą wspólną wielokrotność, tj. $pn = 6$. Wystarczy więc porównać błąd całkowania złożonego dla trzech podprzedziałów po dwie rzędne i dla dwóch podprzedziałów po trzy rzędne. Błąd całkowania złożonego określa wzór (14.5). W takim przypadku stosunek błędów wyrazi się wzorem:

$$\Delta_3/\Delta_2 = 135/_{360} \cdot (3/2)^4 \approx 1,9.$$

Błąd Δ_3 jest *większy* od błędu Δ_2 prawie dwukrotnie, czyli wzór o trzech rzędnych przy całkowaniu złożonym jest mniej dokładny, niż wzór o dwóch rzędnych w przedziale całkowania o *takiej samej* długości.

Analogicznie, wzory o 4 i 5 rzędnych mają ten sam rząd dokładności $m = 5$. Najmniejsza wspólna wielokrotność $pn = 20$. Stąd:

$$\Delta_5/\Delta_4 = 13/_{544320} 42525/2 \cdot (5/4)^6 \approx 1,94.$$

Podobnie jak poprzednio, całkowanie złożone o nieparzystej liczbie rzędnych daje błąd prawie dwukrotnie większy, niż całkowanie złożone o parzystej liczbie rzędnych. Do całkowania złożonego nie należy więc stosować wzorów Czebyszewa o nieparzystej

liczbie rzędnych – wniosek podobny, jak w przypadku wzorów Newtona-Cotesa, gdzie nie należy stosować wzorów o nieparzystej liczbie kroków w jednym podprzedziale.

3. Uzasadnić, który ze wzorów jest dokładniejszy: wzór Simpsona czy wzór Czebyszewa o dwóch rzędnych.

R o z w i ą z a n i e. Dla porównania weźmy podprzedział o długości h , jednakowy w obu przypadkach. Błąd obliczeń dla jednego podprzedziału wyraża się wzorem:

$$\Delta = -\frac{1}{180} h d^4 f^{(4)}(\eta) = -\frac{1}{90} \left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta) \quad \text{wzór Simpsona,}$$

$$\Delta = \frac{1}{135} \left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta) \quad \text{wzór Czebyszewa o dwóch rzędnych.}$$

Biorąc stosunek obydwu błędów oraz zakładając, że punkt η w obu przypadkach jest taki sam, otrzymamy, że błąd wzoru Czebyszewa stanowi $-\frac{2}{3}$ błędu wzoru Simpsona, czyli jest przeciwnego znaku, niż błąd wzoru Simpsona.

Podobnie wzór Newtona-Cotesa i wzór Czebyszewa o czterech rzędnych mają ten sam rząd dokładności $m = 5$. Błędy tych wzorów wyrażają się wzorami:

$$\Delta = -\frac{2}{945} h d^6 f^{(6)}(\eta) = -\frac{8}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^7 f^{(6)}(\eta) \quad \text{wzór Newtona-Cotesa,}$$

$$\Delta = \frac{2}{42\,525} \left(\frac{h}{2}\right)^7 f^{(6)}(\eta) \quad \text{wzór Czebyszewa o dwóch rzędnych.}$$

Biorąc stosunek obydwu błędów oraz zakładając, że punkt η w obu przypadkach jest taki sam, otrzymamy, że:

$$\Delta = -\frac{2}{42\,525} \frac{945}{8} 2^7 \approx -\frac{32}{45} = -0,71 \dots$$

błąd wzoru Czebyszewa stanowi $\approx -71\%$ błędu wzoru Newtona-Cotesa. Widzimy, że wzory Czebyszewa są *dokładniejsze* od wzorów Newtona-Cotesa o takim samym n (takim samym rzędzie dokładności), lecz błąd jest przeciwnego znaku, tzn. jeśli wzór Newtona-Cotesa daje wynik z niedomiarem, wzór Czebyszewa da wynik z nadmiarem.

4. Układ (14.2) wyznaczający położenie rzędnych Czebyszewa dla $n = 6$ i 7 przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^n t_i^k = \frac{n}{k+1} \quad k = 2, 4, 6.$$

Sprowadzić ten układ do jednego równania trzeciego stopnia.

R o z w i ą z a n i e. Uwzględniając, że rzędne położone są symetrycznie względem środka przedziału całkowania, otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^3 t_i^k = \frac{n}{2(k+1)} \quad k = 2, 4, 6.$$

Gdy jest 7 rzędnych, środkowa rzędna znajduje się w środku przedziału, dla której $t_4 = 0$. Wprowadzając nową zmienną $y_i = t_i^2$, jawna postać układu jest następująca:

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 + y_3 &= \alpha_1, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= \alpha_2, \\ y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 &= \alpha_3,\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= n/6, \\ \alpha_2 &= n/10, \\ \alpha_3 &= n/14.\end{aligned}$$

Równania powyższe są rodzajem wzorów Viète'y, znanych ze szkoły, wiążących pierwiastki równania trzeciego stopnia z jego współczynnikami:

$$y^3 + by^2 + cy + d = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0. \quad (14.6)$$

Są one następujące:

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 + y_3 &= -b, \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 &= c, \\ y_1y_2y_3 &= -d.\end{aligned}$$

Z pierwszego równania wynika natychmiast:

$$b = -\alpha_1.$$

Pozostałe dwa współczynniki c i d musimy wyrazić za pomocą sumy kwadratów i sumy sześcianów pierwiastków. Podnosząc do kwadratu sumę pierwiastków, otrzymamy:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2 + 2c,$$

co prowadzi do wzoru:

$$c = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2).$$

Z kolei podnosząc do sześcianu sumę pierwiastków, otrzymamy:

$$\alpha_1^3 = 3\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3 - 6d,$$

co prowadzi do wzoru:

$$d = (3\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_1^3)/6.$$

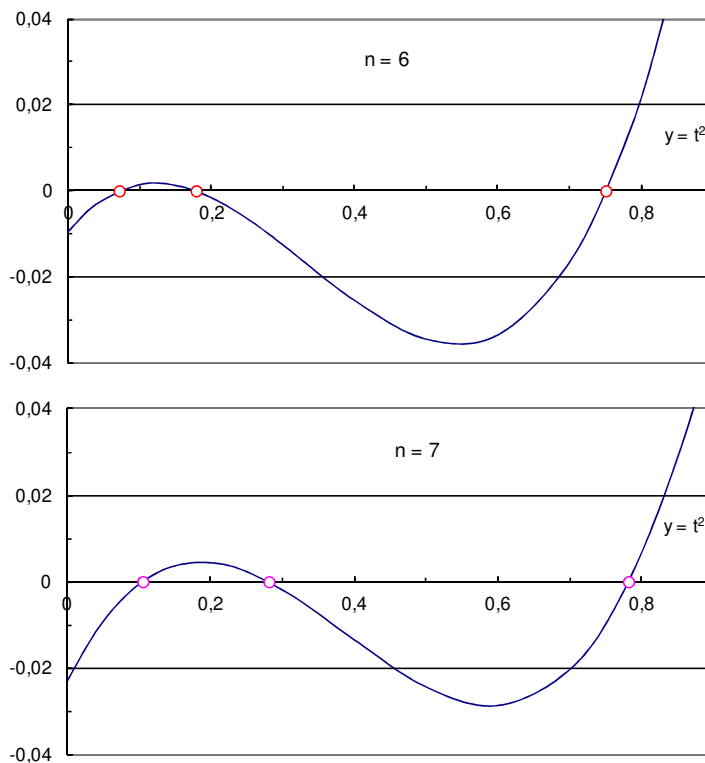
Dla $n = 6$:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 & b &= -1, \\ \alpha_2 &= 0,6 & c &= 0,2, \\ \alpha_3 &= 3/7 & d &= -1/105.\end{aligned}$$

Dla $n = 7$:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 7/6 & b &= -7/6, \\ \alpha_2 &= 0,7 & c &= \frac{119}{360}, \\ \alpha_3 &= 1/2 & d &= -\frac{149}{6480}.\end{aligned}$$

Rozwiązaniem równania (14.6) są liczby algebraiczne, podane w tabeli 3 dla $n = 6$ i 7 . Przebieg wielomianów (14.6) pokazany jest na rys. 7. Warto zwrócić uwagę, że wielomian dla $n = 7$ nie przechodzi przez zero, choć czwarty węzeł znajduje się w tym punkcie ($t_4 = 0$).



Rys. 7. Wielomiany trzeciego stopnia wyznaczające położenie rzędnych Czebyszewa (odcięte t) dla $n = 6$ i 7

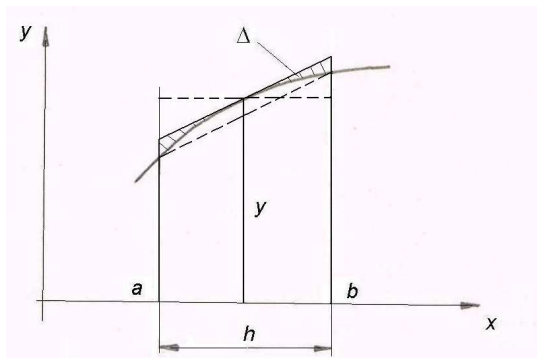
§ 15. Metoda prostokątów

Spośród wzorów Czebyszewa na szczególną uwagę zasługuje wzór o $n = 1$, stosujący tylko jedną rzędną w środku każdego podprzedziału. Całkowanie funkcji w obrębie jednego podprzedziału wygląda następująco:

$$\int_a^b y(x) dx = hy + \Delta, \quad (15.1)$$

gdzie y jest wartością funkcji podcałkowej w środku przedziału całkowania $x = \frac{1}{2}(a + b)$. Ze wzoru widać, że wartość całki równa się polu prostokąta o bokach h oraz y (rys. 8) – stąd nazwa tego wzoru. Z rysunku widać, że błąd metody prostokątów Δ

(pole zakreskowane pod styczną do krzywej) jest o połowę mniejsze od pola nad siecią, przedstawiającego błąd metody trapezów.



Rys. 8. Interpretacja geometryczna wzoru prostokątów i błędu metody Δ

Błąd metody prostokątów dla jednego podprzedziału wyraża się wzorem:

$$\Delta = \frac{1}{24} h^3 f^{(2)}(\eta), \quad (15.2)$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$.

W praktyce zawsze stosuje się całkowanie złożone. Dzieląc przedział całkowania $\langle a, b \rangle$ na dowolną liczbę podprzedziałów p o jednakowej długości h , łatwo jest otrzymać ze wzoru (15.1) wzór na całkowanie złożone metodą prostokątów:

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^p y_i + \Delta, \quad (15.3)$$

gdzie $h = (b - a)/p$ jest długością podprzedziałów, p jest liczbą podprzedziałów, y_i są rzędnymi funkcji podcałkowej w środku podprzedziałów, Δ jest błędem metody. Łatwo zauważyć, że całkowanie metodą prostokątów jest równoznaczne z aproksymacją funkcji podcałkowej krzywą schodkową (histogramem), o stałej szerokości pasków.

Błąd Δ przy całkowaniu złożonym otrzymamy, sumując błędy dla poszczególnych podprzedziałów dane wzorem (15.2). Po łatwych rachunkach otrzymamy:

$$\Delta = \frac{1}{24} (b - a) h^2 f^{(2)}(\eta), \quad (15.4)$$

gdzie $\eta \in \langle a, b \rangle$. Wzór prostokątów ma ten sam rząd dokładności co wzór trapezów, jednak ma dwukrotnie mniejszy błąd niż metoda trapezów, lecz przeciwnego znaku.

Poprawka dla metody prostokątów wyraża się wzorem:

$$\Delta_p = \frac{1}{24} h (\Delta y_{p+1} - \Delta y_0), \quad (15.5)$$

gdzie Δy_{p+1} oraz Δy_0 są różnicami na końcach przedziału całkowania:

$$\Delta y_{p+1} = f(b+h) - f(b),$$

$$\Delta y_0 = f(a) - f(a-h).$$

Metoda prostokątów jest prostsza niż metoda trapezów, jednak wymaga więcej rachunków, gdy chcemy zastosować ekstrapolację Richardsona (zmniejszając krok całkowania dwukrotnie, w metodzie prostokątów przy ponownym całkowaniu nie powtarzają się rzędne z poprzedniego całkowania).

Zadania

1. Na ile kroków p należy podzielić przedział całkowania, aby obliczyć:

$$\ln 2 = \int_1^2 dx/x$$

z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku za pomocą:

- metody trapezów,
- metody Simpsona,
- metody prostokątów.

Obliczenia wykonać bez stosowania poprawek, a następnie – z uwzględnieniem poprawek.

R o z w i ą z a n i e. Musimy wykorzystać w tym celu wzory na błąd całkowania złożonego z jednakowym krokiem d . Dla metody trapezów dany jest wzorem (7.8), dla metody Simpsona – wzorem (8.5), a dla metody prostokątów – wzorem (15.4). Uwzględniając, że $pd = b - a = 1$, stąd krok całkowania $d = 1/p$. Zatem liczba niezbędnych kroków do obliczenia całki zadaną dokładnością wynosi:

$$\text{a) } p^2 > y^{(2)}/12\Delta, \quad \text{b) } p^4 > y^{(4)}/180\Delta, \quad \text{c) } p^2 > y^{(2)}/24\Delta.$$

Błąd Δ jest zadany, równy $\Delta = 0,5 \cdot 10^{-6}$. By znaleźć liczbę kroków, musimy oszacować drugą i czwartą pochodną w przedziale całkowania, co w tym przypadku jest łatwe: $y^{(2)} < 2$, zaś $y^{(4)} < 24$. Mamy więc: a) $p > 577$ b) $p > 23$ c) $p > 408$.

Poprawka wzoru trapezów dana jest wzorem (9.2), wzoru Simpsona – wzorem (9.3), a wzoru prostokątów – wzorem (15.5). Poprawki wynoszą $\frac{3}{4}$ i $5\frac{5}{8}$; są przeciwnego znaku do $y^{(2)}$ i $y^{(4)}$. Otrzymamy zależności:

$$\begin{aligned} \text{a) } p &> \{[y^{(2)} + (y'_n - y'_0)]/12\Delta\}^{1/2} = (1,25/12\Delta)^{1/2} = 457, \\ \text{b) } p &> \{[y^{(4)} + (y'''_n - y'''_0)]/180\Delta\}^{1/4} = (18,375/180\Delta)^{1/4} = 22. \end{aligned}$$

Dla metody prostokątów $p > 457/\sqrt{2} = 323$. Widać dużą skuteczność metody Simpsona.

2. Całkę:

$$J = \int_0^{\pi/2} (\sin x)/x dx$$

obliczono kilkoma metodami:

- a) metodą Simpsona z krokiem $d = \pi/40$ otrzymano wynik $J = 1,370\,762\,216$,

- b) metodą prostokątów z krokiem $d = \pi/40$ otrzymano wynik $J = 1,370\,866\,345$,
 c) metodą prostokątów z krokiem $d = \pi/80$ otrzymano wynik $J = 1,370\,788\,211$.

Podać wartości dokładniejsze uwzględniając poprawki.

- d) Podać wartość dokładniejszą powyższej całki, stosując ekstrapolację Richardsona do wyników w punkcie b) i c).

W s k a z ó w k a. Poprawka dla wzoru prostokątów dana jest wzorem (15.5). Uwzględnienie jej nie nastręcza kłopotów – wystarczy obliczyć różnice zwykłe na końcach przedziału całkowania. Podobnie jest z ekstrapolacją Richardsona – korzystamy ze wzoru (9.4), w którym $m = 2$.

Trudniej jest określić poprawkę dla wzoru Simpsona – wzór (9.3); wyraża się on bowiem za pomocą trzecich pochodnych, które w tym przypadku wyrażają się zawiłym wzorem. W tej sytuacji łatwiej oprzeć się na trzecich różnicach centralnych funkcji podcałkowej. W tym celu musimy mieć dwie dodatkowe wartości funkcji przed początkiem przedziału całkowania i za końcem przedziału. Gdy to zrobimy, okaże się, że trzecie różnice centralne $\delta^3 y_0 = \delta^3 y_n = 0$, czyli, że poprawka wzoru Simpsona jest równa zero.

O d p o w i e d ź:

- a) $J = 1,370\,762\,216$,
 b) $J = 1,370\,762\,178$,
 c) $J = 1,370\,762\,169$,
 d) $J = 1,370\,762\,166$.

Wartość dokładna $J = 1,370\,762\,168\dots$ Zwraca uwagę, jak skuteczna jest poprawka w metodzie prostokątów. Ta sama uwaga dotyczy też metody trapezów.

3. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$$

za pomocą wzoru trapezów z poprawką, przyjmując krok całkowania $d = \pi/12$.

W s k a z ó w k a. Powyższa całka ma osobliwość w punkcie $x = 0$, którą łatwo można usunąć, stosując proste przekształcenie:

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln x \, dx + \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Pierwszą całkę można łatwo obliczyć analitycznie, stosując całkowanie przez części, druga jest całką właściwą, łatwą do obliczenia numerycznego.

O d p o w i e d ź: $J = -1,088\,793$.

Wartość dokładna $J = 1,088\,793\,045\dots$ ($= -\frac{1}{2}\pi \ln 2$).

Inną możliwość obliczenia całki wyjściowej jest zastosowanie całkowania przez części:

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, dx.$$

Pierwsze wyrażenie znika, zatem:

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx.$$

Otrzymaliśmy całkę regularną, łatwą do obliczenia numerycznego. Co prawda w zerze występuje nieoznaczoność typu $0/0$, ale jest to tzw. nieciągłość usuwalna. Wartość w tym punkcie równa się granicy, którą najlepiej otrzymać z działań na małych liczbach. Stąd w zerze wartość funkcji wynosi $x/x=1$.

§ 16. Wzory Gaussa

We wzorach Gaussa nie nakłada się żadnych ograniczeń na węzły ani na mnożniki, dzięki czemu uzyskuje się wzory o największym możliwym rzędzie dokładności przy danej liczbie rzędnych branych do obliczeń całki. W układzie (5.3) spełniona jest wtedy maksymalna liczba równań, co zapewnia maksymalny rząd dokładności m .

Podobnie jak we wzorach Czebyszewa, we wzorach Gaussa stosuje się numerację węzłów od 1 do n , gdzie n oznacza liczbę rzędnych w obrębie jednego podprzedziału, branych do obliczenia całki. Funkcja podcałkowa nie może być zadana tabelarycznie, natomiast może być zadana wykreślnie lub analitycznie.

W celu określenia ogólnego wzoru (5.8) na całkowanie, z układu (5.3) musimy wyznaczyć bezwymiarowe odcięte t_i oraz bezwymiarowe mnożniki H_i dla danej liczby rzędnych n stosowanych do obliczenia całki. Bez rozwiązywania tego układu wiadomo, że mnożniki mają przebieg symetryczny, a węzły położone są symetrycznie względem środka danego podprzedziału. Gdy n jest nieparzyste, jedna rzędna wypada w środku podprzedziału. Łatwo jest ustalić, że rząd dokładności wzorów Gaussa wynosi $m = 2n - 1$.

Układ (5.3) jest nieliniowy. Stąd bardzo trudno rozwiązać go zwykłymi metodami dla $n > 3$. Jego rozwiązanie można radykalnie uprościć, ponieważ istnieje możliwość wyznaczenia położenia węzłów t_i niezależnie od układu, opisane w § 4. Znając położenie węzłów t_i , wyznaczenie mnożników H_i nie przedstawia już większych trudności. Wystarczy wziąć w tym celu n pierwszych równań z układu (5.3), które ze względu na H_i są liniowe, łatwe do rozwiązania. Tak wyznaczone węzły t_i oraz mnożniki H_i spełniają wszystkie $2n$ równań układu (5.3).

Można wykazać, że węzły t_i , spełniające układ (5.3), są pierwiastkami wielomianu Legendre'a n -tego stopnia $P_n(t)$, który ma n pierwiastków rzeczywistych w przedziale $(-1, 1)$, położonych symetrycznie względem początku układu współrzędnych.

Gdy węzły t_i są pierwiastkami wielomianu Legendre'a $P_n(t)$, a mnożniki H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są wyznaczone z układu (5.3), wzór (5.8) nazywa się wzorem Gaussa-Legendre'a.

Tabela 4 podaje położenie węzłów $\bar{t}_i$ oraz mnożniki H_i wzorów Gaussa-Legendre'a dla liczby rzędnych $n = 1 \div 10$ w przedziale całkowania. Podany jest także rząd dokładności wzorów m oraz stała c we wzorze na błąd metody Δ , dany wzorem (4.2). Stałą tę można wyrazić też bezpośrednio, jako funkcję n :

$$c = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)}.$$

Tab. 4. Położenie węzłów t_i , mnożniki H_i , rząd dokładności m oraz błąd Δ wzorów Gaussa-Legendre'a

n	m	$t_i = \pm l_i/1/2h$	H_i	Stała c
1	1	0	1	$\frac{1}{3}$
2	3	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,5774$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{135}$
3	5	$\sqrt[3]{0,6} \approx 0,7746$ 0	$\frac{5}{18}$ $\frac{8}{18}$	$\frac{1}{15\,750}$
4	7	$\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} \approx 0,8611$ $\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} \approx 0,3400$	$\frac{18-\sqrt{30}}{72} \approx 0,1739$ $\frac{18+\sqrt{30}}{72} \approx 0,3261$	$\frac{1}{3\,472\,875}$
5	9	$\sqrt{\frac{35+2\sqrt{70}}{63}} \approx 0,9062$ $\sqrt{\frac{35-2\sqrt{70}}{63}} \approx 0,5385$ 0	$\frac{3,22-0,13\sqrt{70}}{18} \approx 0,1185$ $\frac{3,22+0,13\sqrt{70}}{18} \approx 0,2393$ $\frac{5,12}{18} \approx 0,2844$	$\frac{1}{1\,237\,732\,650}$
6	11	0,932 469 514 203 0,661 209 386 466 0,238 619 186 083	0,085 662 246 190 0,180 380 786 524 0,233 956 967 287	1/648 984 486 150
7	13	0,949 107 912 343 0,741 531 185 599 0,405 845 151 377 0	0,064 742 483 085 0,139 852 695 745 0,190 915 025 253 0,208 979 591 837	$2,127\,432\,385 \cdot 10^{-15}$
8	15	0,960 289 856 498 0,796 666 477 414 0,525 532 409 916 0,183 434 642 496	0,050 614 268 145 0,111 190 517 223 0,156 853 322 939 0,181 341 891 689	$2,224\,765\,891 \cdot 10^{-18}$
10	19	0,973 906 528 517 0,865 063 366 689 0,679 409 568 299 0,433 395 394 129 0,148 874 338 982	0,033 335 672 155 0,074 725 674 575 0,109 543 181 258 0,134 633 359 655 0,147 762 112 358	$1,202\,510\,547 \cdot 10^{-24}$

Dane dla większej liczby rzędnych, aż do $n = 96$, można znaleźć w [1] (w tablicach tych mnożniki $w_i \equiv 2H_i$). Dla $n = 1$ i 2 wzory Gaussa-Legendre'a są identyczne ze wzorami Czebyszewa (dla $n = 1$ jest to wzór prostokątów). Wszystkie mnożniki H_i są dodatnie, co jest korzystne dla obliczeń. Chociaż stała c we wzorze na błąd bardzo szybko maleje ze wzrostem n , co widać w tabeli 4, bez porównania szybciej niż we wzorach Newtona-Cotesa i wzorach Czebyszewa, to jednak również i tutaj wskazane jest stosowanie całkowania złożonego przy użyciu wzorów o niezbyt dużym n (liczbie rzędnych w podprzedziale), gdy całkuje się funkcje niebędące wielomianami.

Mnożniki rzędnych można znaleźć analitycznie, z ominięciem układu równań (5.3), korzystając ze wzoru (4.5). Gdy $\theta \equiv 1$, wielomianami ortogonalnymi w przedziale $(-1, 1)$ są wielomiany Legendre'a $P_n(x)$. Stąd we wzorze (4.5) musimy wpierw przejść na całkowanie względem bezwymiarowej zmiennej t , stosując podstawienie $x = \frac{1}{2}ht$:

$$M_i = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\frac{1}{2}h}{P'_n(t_i)P_{n-1}(t_i)} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zatem bezwymiarowe mnożniki $H_i \equiv M_i/h$, dane są wzorem:

$$H_i = \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{P'_n(t_i)P_{n-1}(t_i)} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.1)$$

Z własności dyskutowanych w § 26 wynika, że całka z P_{n-1}^2 równa się $2/(2n-1)$, zaś współczynnik wiodący wielomianów Legendre'a (patrz zadanie 5 na s. 173) równa się:

$$a_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \equiv \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}. \quad (16.2)$$

Stąd $a_n/a_{n-1} = (2n-1)/n$. Podstawiając te stałe do wzoru (16.1), otrzymamy:

$$H_i = \frac{1}{nP'_n(t_i)P_{n-1}(t_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Problemem jest uproszczenie mianownika. W tym celu musimy wykorzystać wzory rekurencyjne dla wielomianów Legendre'a. Wzorów tych jest wiele. Jednym z nich jest:

$$(1-t^2)P'_n = nP_{n-1} - nP_n,$$

dany wzorem (26.9). Podstawiając $t = t_i$, otrzymamy:

$$(1-t_i^2)P'_n(t_i) = nP_{n-1}(t_i),$$

gdyż $P_n(t_i) = 0$. Ostatecznie otrzymamy prosty wzór:

$$H_i = \frac{1}{(1-t_i^2)P_n'^2(t_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16.3)$$

który jeszcze raz podkreśla, że wszystkie mnożniki rzędnych, bez względu na ich liczbę, są dodatnie. Mnożniki w profesjonalnych tablicach obliczane są wg powyższego wzoru. Choć wzór jest zwarty, to jednak obliczenia mnożników są pracochłonne, zwłaszcza dla $n > 5$. Dlatego trzeba je tablicować. Identyczne wyniki otrzymuje się z układu (5.3).

Wzory Gaussa nadają się do całkowania złożonego. Gdy długość każdego podprzedziału jest taka sama i w każdym podprzedziale zastosowany jest wzór Gaussa o tej samej liczbie rzędnych n , to obliczenie całki jest następujące:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^p \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x)dx = h \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n H_i f(x_{ij}),$$

gdzie p jest liczbą podprzedziałów, $h = (b - a)/p$ jest długością jednego podprzedziału, n jest liczbą rzędnych w jednym podprzedziale, x_{ij} jest odciętą i -tego węzła w j -tym podprzedziale, x_j jest odciętą środka j -tego podprzedziału.

Przy dwukrotnym wykonaniu obliczeń tej samej całki i tym samym wzorem, lecz o różnej liczbie podprzedziałów p_1 i p_2 , do otrzymanych wyników można zastosować ekstrapolację Richardsona. Dostanie się w ten sposób znacznie dokładniejszy wynik.

PRZYKŁAD 16. Obliczyć numerycznie liczbę π daną za pomocą całki: $\frac{1}{4}\pi = \int_0^1 dx/(1+x^2)$ za pomocą dwukrotnego zastosowania wzoru Gaussa o trzech rzędnych.

R o z w i ą z a n i e. Liczba podprzedziałów $p = 2$, stąd długość jednego podprzedziału $h = (b - a)/p = 1/2$, promień podprzedziału $h/2 = 1/4$. Odcięte środków podprzedziałów wynoszą: $x_1 = h/2 = 1/4$, $x_2 = x_1 + h = 3/4$. Odcięte węzłów i mnożniki w podprzedziałach są następujące:

$$\begin{aligned} x_{1j} &= x_j - 1/2h\sqrt{0,6} = x_j - 1/4\sqrt{0,6}, & H_1 &= 5/18, \\ x_{2j} &= x_j, & H_2 &= 8/18, \\ x_{3j} &= x_j + 1/4\sqrt{0,6}, & H_3 &= 5/18. \end{aligned}$$

Wspólny mianownik mnożników można wyciągnąć przez znak sumy.

ij	x_{ij}	$y_{ij} = 1/(1+x_{ij}^2)$	H_i	$H_i y_{ij}$
11	$1/4 - \sqrt{(3/80)}$	0,996 834 6	5	4,9841732
21	$1/4$	0,941 176 5	8	7,5294118
31	$1/4 + \sqrt{(3/80)}$	0,835 544 3	5	4,1777217
12	$3/4 - \sqrt{(3/80)}$	0,763 634 9	5	3,8181747
22	$3/4$	0,64	8	5,12
32	$3/4 + \sqrt{(3/80)}$	0,528 967 9	5	2,6448397
			$\Sigma =$	28,274 3211

Stąd $\pi = 4 \cdot 1/2 \cdot 1/18 \cdot 28,2743211 = 3,1415912$.

Dokładna wartość $\pi = 3,1415926...$ Uzyskany wynik jest mniej dokładny niż w przykładzie na s. 63, gdzie do obliczenia tej samej całki zastosowano trzykrotnie wzór Czebyszewa o dwóch rzędnych, identyczny ze wzorem Gaussa o dwóch rzędnych. Jak widać,

zastosowanie wzoru o wyższym rzędzie dokładności nie polepszyło wyniku. Podobne obliczenia, wykonane przy pomocy jednokrotnego zastosowania wzoru Gaussa o sześciu rzędnych, dają dużo lepszą wartość $\pi = 3,141\,5926$, odwrotnie niż w metodzie Czebyszewa. Wydaje się jednak, że ze względu na prostotę i skuteczność obliczeń najlepiej jest ograniczyć się, przy całkowaniu wielomianów do dwóch pierwszych wzorów Gaussa, identycznych ze wzorami Czebyszewa dla $n = 1$ i 2 .

Stosowanie całkowania złożonego z zastosowaniem wzorów o niskich rzędach dokładności jest najbardziej efektywnym sposobem całkowania, tzn. pozwalającym uzyskać dokładny wynik przy najmniejszej liczbie rzędnych. W celu zwiększenia dokładności obliczeń znacznie lepiej jest powtórzyć obliczenie z krótszymi podprzedziałami całkowania i zastosować ekstrapolację Richardsona niż stosować wzory o wysokich rzędach dokładności. Skuteczność ekstrapolacji Richardsona pokazana jest w przykładzie na s. 45.

Zadania

1. Stosując dwukrotnie wzór Gaussa o trzech rzędnych obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 (1+2x)^{1/2} dx.$$

O d p o w i e d ź: $J = 1,398\,718$. Wartość dokładna wynosi:

$$J = \frac{1}{3}(1+2x)^{3/2} \Big|_0^1 = \sqrt{3} - \frac{1}{3} = 1,398\,717.$$

Widzimy, że ostatnia cyfra jest niedokładna o jedno miejsce dziesiętne.

2. Stosując dwukrotnie wzór Gaussa o trzech rzędnych, obliczyć całkę:

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x}{2 + \cos x} dx.$$

O d p o w i e d ź: $J = 3,471\,945$. Wartość dokładna wynosi $3,472\,980\dots$. Widzimy, że już trzecia cyfra dziesiętna jest niedokładna. Mała dokładność wynika z dość długich podprzedziałów, równych $\frac{1}{2}\pi$. Gdybyśmy podwoili liczbę podprzedziałów, czyli skrócili długości podprzedziałów o połowę, otrzymalibyśmy wynik $J = 3,472\,966$, który ma dokładne cztery cyfry dziesiętne.

3. Znaleźć dokładniejszą wartość całki z zadania 2 w oparciu o ekstrapolację Richardsona.

R o z w i ą z a n i e. Rząd dokładności wzoru Gaussa o trzech rzędnych w przedziale wynosi $m = 5$. Dokładniejszą wartość określa wzór (9.4). Podstawiając $J_1 = 3,471\,945$, $J_2 = 3,472\,966$, $\alpha = 2$, $\alpha^m = 32$, otrzymamy:

$$J = J_2 + \frac{J_2 - J_1}{31} = 2966 + \frac{2966 - 1945}{31} = 2998,9$$

(do wzoru można podstawić jedynie cyfry różniące się). Tak więc dokładniejsza wartość całki równa się $J = 3,472\,999$.

4. Obliczyć pole powierzchni pod krzywą zdefiniowaną równaniem:

$$y = x \operatorname{tg} [(1-x)\pi/2] = x/\operatorname{tg} x\pi/2$$

w przedziale od $x = 0$ do $x = 1$. Obliczenie wykonać za pomocą:

- wzoru Simpsona, przyjmując krok całkowania $d = 0,2$ w połączeniu z uśrednionym wzorem 5–8,
- wzoru prostokątów z poprawką, przyjmując $h = 0,2$,
- wzoru Gaussa o trzech rzędnych.

UWAGA. Dla $x = 0$ występuje symbol nieoznaczony typu $0/0$. Wartość w tym punkcie należy obliczyć jako granicę lub jako działania na wielkościach nieskończenie małych. Dla nieskończenie małego x rzędna $y = x/x\pi/2 = 2/\pi$.

O d p o w i e d ź: a) 0,441 344, b) 0,441 235, c) 0,441 305, dokładna wartość 0,441 271.

5. Obliczyć pole powierzchni pod krzywą zdefiniowaną równaniem:

$$y = 5 \{ 1 - [1 - (z/D)]^3 \}$$

w przedziale od $z = 0$ do D za pomocą wzoru Gaussa o możliwie małej liczbie rzędnych n .

R o z w i ą z a n i e. Mamy obliczyć całkę:

$$A = \int_0^D 5 \{ 1 - [1 - (z/D)]^3 \} dz,$$

gdzie A jest polem powierzchni pod daną krzywą. Podstawiając $z/D = x$, otrzymamy:

$$A = 5D \int_0^1 [1 - (1-x)^3] dx.$$

Funkcja podcałkowa jest wielomianem trzeciego stopnia. Zatem do obliczenia całki wystarczy wziąć 2 rzędne, położone w punktach $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm 1/\sqrt{3})$. Sama całka równa się $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{3}{4}$, co daje $A = 3\frac{3}{4}D$.

6. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa ma asymptotę pionową w zerze, dlatego nie da się jej obliczyć wzorami dla funkcji regularnych. Musimy zastosować podstawienie usuwające osobliwość. Podstawmy za $\operatorname{tg} x = t^2$. Stąd $dx/\cos^2 x = 2t dt$. Ale $1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + t^4$. Podstawiając do całki, otrzymamy całkę regularną:

$$J = \int_0^1 \cos^2 x \, 2t dt = \int_0^1 \frac{2}{1+t^4} dt,$$

która monotonicznie maleje od 2 do 1. Całkując metodą Gaussa w dwóch podprzedziałach po 3 rzędne, otrzymamy $J = 1,7339476$. Dokładna wartość $J = 1,73394597\dots$

Wynik jest dokładny do 5 cyfr dziesiętnych. Gdy zastosujemy cztery podprzedziały po 3 rzędne, otrzymamy $J = 1,733\,946\,0$, prawie dokładny do 6 cyfr dziesiętnych.

7. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

R o z w i ą z a n i e . Funkcja podcałkowa ma asymptotę pionową w zerze. Osobliwość usuniemy, stosując podstawienie $\sqrt{x} = t^2$. Otrzymamy całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{2}{(1+t^2)} dt = 2 \arctg 1 = \frac{1}{2} \pi,$$

którą daje się obliczyć analitycznie.

8. Stosując dwukrotnie wzór Gaussa o trzech rzędnych obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx.$$

O d p o w i e d ź : $J = 0,915\,965\,6$. Wartość dokładna wynosi $J = 0,915\,965\,594\dots$ Obie wartości są praktycznie identyczne, gdyż funkcja podcałkowa jest regularna, monotonicznie maleje w przedziale całkowania w niewielkim zakresie, od wartości 1 w zerze, do wartości 0,785 w punkcie $x = 1$. Usuwalna nieciągłość w zerze nie zakłóca przebiegu funkcji.

9. Stosując dwukrotnie wzór Gaussa o trzech rzędnych obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

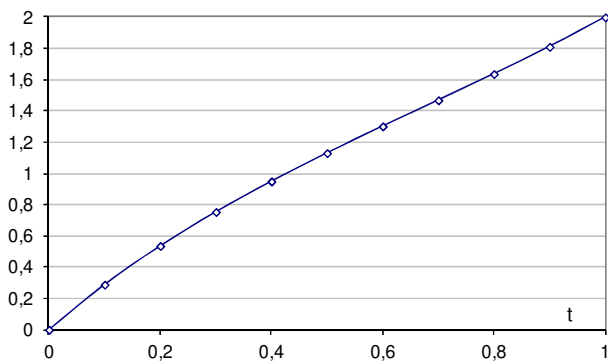
R o z w i ą z a n i e . Mimo podobieństwa do całki z zadania 5 przebieg funkcji podcałkowej jest teraz zupełnie inny. Funkcja podcałkowa zmienia się od wartości 1 w zerze, gdzie występuje nieciągłość usuwalna, do wartości $\frac{1}{2}\pi$ w punkcie 1. Przebieg jej jest elipsopodobny, tzn. na początku przedziału występuje styczna pozioma, a na końcu – pionowa. Pochodna tej funkcja ma więc osobliwość. Aby ją scałkować, musimy wpięrow usunąć osobliwość przez odpowiednie podstawienie.

Zastosujmy podstawienie $x = 1 - t^2$. Zatem $dx = -2tdt$. Stąd otrzymamy:

$$J = \int_0^1 \frac{\arcsin(1-t^2)}{1-t^2} 2tdt.$$

Przebieg funkcji podcałkowej pokazany jest na rys. 9. Jak widać, jest ona teraz regularna, zapewni wynik o dużej dokładności.

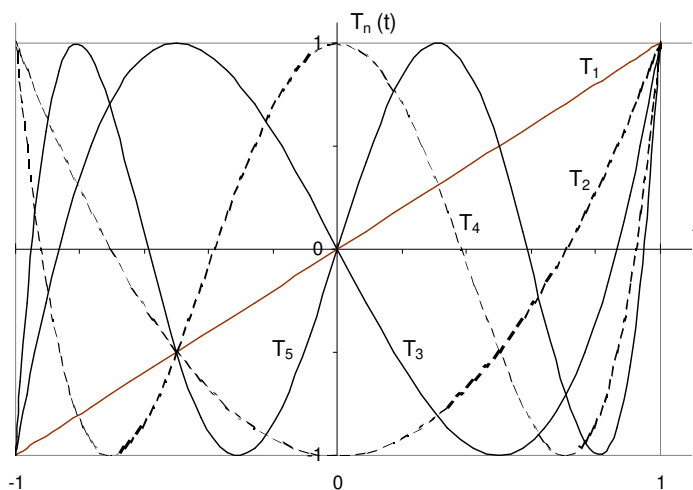
O d p o w i e d ź : $J = 1,088\,791\,9$. Wartość dokładna wynosi $J = 1,088\,793\,0\dots$ Obie wartości są praktycznie tożsame, czego należało się spodziewać.



Rys. 9. Wykres funkcji podcałkowej po zamianie zmiennej

§ 17. Całkowanie w bazie Czebyszewa

Proste rachunki pokazują (wystarczy zajrzeć do tablic szkolnych), że $\cos n\theta$ jest wielomianem stopnia n względem $\cos \theta$, zwanym *wielomianem Czebyszewa*. Jest on parzysty (nieparzysty), gdy n jest parzyste (nieparzyste), np. $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$. Mamy więc tożsamość: $T_n(\cos \theta) \equiv \cos n\theta$. Podstawiając za $t = \cos \theta$, otrzymamy $T_n(t) = \cos n(\arccos t)$. Pierwszych 5 wielomianów pokazanych jest na rys. 10.



Rys. 10. Wielomiany Czebyszewa

Węzły Czebyszewa znajdują się w miejscach zerowych wielomianów $T_n(t)$, gdzie t jest zmienną w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. Znajdziemy je z rozwiązania równania $T_n(t) = 0$. Podstawiając $t = \cos \theta$, otrzymamy równanie $\cos n\theta = 0$, typowe z zakresu szkoły średniej. Spełniają je argumenty:

$$n\theta_i = \frac{1}{2}\pi(2i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Stąd: $\theta_i = (2i - 1)(\frac{1}{2}\pi/n)$,

co definiuje położenie węzłów w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$:

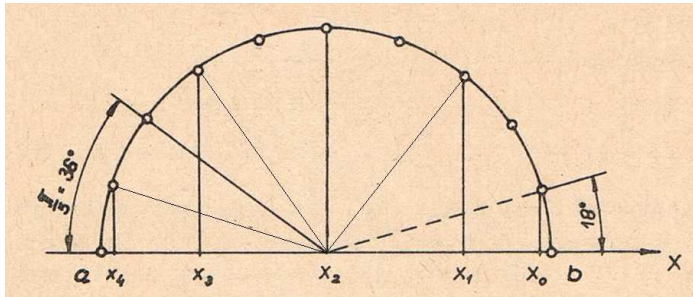
$$t_i = \cos[(2i - 1)(\frac{1}{2}\pi/n)], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.1)$$

Gdy mamy przedział $\langle a, b \rangle$, zamiana zmiennej:

$$x = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a)t \quad (17.2)$$

przekształca przedział $\langle a, b \rangle$ w przedział $\langle -1, 1 \rangle$. Wzór (17.2) można zapisać krócej $x = c + \frac{1}{2}ht$, gdzie $c \equiv \frac{1}{2}(a + b)$ jest środkiem przedziału całkowania, $h \equiv b - a$ jest długością przedziału, zaś $\frac{1}{2}h$ jest promieniem przedziału.

Na rys. 11 pokazana jest konstrukcja układu węzłów Czebyszewa w przedziale $\langle a, b \rangle$ dla 5 punktów będących pierwiastkami równania $\cos 5\theta = 0$. Zauważmy, że łuk kąta półpełnego o promieniu $r = \frac{1}{2}h$ dzielony jest na $n = 5$ równych części. Położenie węzłów wyznaczają rzuty środka każdej części łuku na oś x .



Rys. 11

Węzły Czebyszewa bywają numerowane od 0 do n , jak na rys. 11. Wtedy liczba rzędnych równa się $n + 1$. Jednak będziemy numerowali je od 1 do n , jak w przypadku wzorów Czebyszewa czy Gaussa-Legendre'a.

Wielomian interpolacyjny w bazie Czebyszewa ma cenną własność – przybliża *jednostajnie* funkcję interpolowaną, tzn. maksymalna odchyłka od funkcji interpolowanej jest stała w całym przedziale interpolacji. Wynika to z przebiegu tych wielomianów w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ (rys. 10). Inne wielomiany interpolacyjne nie mają tej własności.

Znając położenie węzłów Czebyszewa w przedziale całkowania mnożniki H_i , możemy wyznaczyć z układu (5.3), w którym bezwymiarowe t_i dane jest wzorem (17.1). Całkowanie odbywa się wg ogólnego wzoru (5.8), w którym rzędne y_i brane są w punktach x_i , danych wzorem (17.2). Bezwymiarowe mnożniki H_i nie zależą od długości przedziału całkowania.

Układ (5.3) można zapisać w postaci macierzowej. Uwzględniając symetrię węzłów względem środka przedziału całkowania oraz symetryczny przebieg mnożników, dla parzystej liczby węzłów n przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{n/2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-2} & t_2^{n-2} & \dots & t_{n/2}^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{n/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \vdots \\ \frac{1}{2(n-1)} \end{bmatrix}, \quad (17.3)$$

gdzie k zmienia się co 2, od 0 do $n - 2$, indeksy mnożników H_i zmieniają się co 1, od 1 do $\frac{1}{2}n$, zaś po prawej stronie występują odwrotności liczb $2(k + 1)$, zmieniające się co 4, od 2 do $2(n - 1)$. W przypadku nieparzystej liczby rzędnych n , układ (5.3) przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{2} \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{n-1}^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_{n-1}^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{(n+1)/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \vdots \\ \frac{1}{2n} \end{bmatrix}, \quad (17.4)$$

gdzie k zmienia się co 2, od 0 do $n - 1$, indeksy mnożników i zmieniają się co 1, od 1 do $\frac{1}{2}(n + 1)$, zaś po prawej stronie występują odwrotności liczb $2(k + 1)$, których mianowniki zmieniają się co 4, od 2 do $2n$. Wektor mnożników H_i w prosty sposób znajduje się w Excelu, za pomocą działań na macierzach. Odcięte węzłów $t_i = \cos \theta_i$ znajdowane są z dokładnością do 16 cyfr znaczących. Z podobną dokładnością obliczana jest macierz odwrotna. Sprawdzeniem jest iloczyn macierzy wyjściowej i macierzy odwrotnej, który winien dać macierz jednostkową, z jedynkami na głównej przekątnej i zerami poza nią. Zwykle na głównej przekątnej są dokładne jedynki, a poza nią – śladowe liczby rzędu $10^{-16} \div 10^{-13}$.

Tabela 5 podaje położenie węzłów t_i oraz mnożniki H_i dla wzorów na całkowanie w bazie Czebyszewa dla liczby rzędnych w przedziale $n = 2 \div 18$. Podany jest także rząd dokładności wzorów m oraz stała c we wzorze na błąd metody Δ , dany wzorem (14.3). Wzór dla $n = 1$ jest tożsamy ze wzorem prostokątów, dlatego nie jest podany w tabeli 5. Łatwo zauważyć, że rząd dokładności wzorów wynosi:

$$m = \begin{cases} n & n \text{ nieparzyste} \\ n-1 & n \text{ parzyste} \end{cases}. \quad (17.5)$$

Rozwiązaniem układu równań na mnożniki H_i są liczby algebraiczne. Jednakże, w odróżnieniu od wzorów Newtona-Cotesa (równokrokowych) wzory o nieparzystej liczbie rzędnych są dokładniejsze 2,5÷6 razy, niż wzory o parzystej liczbie. Można pokazać, że – podobnie, jak we wzorach Gaussa – wszystkie mnożniki $H_i > 0$, co jest korzystne dla obliczeń, i maleją z oddaleniem rzędnych od środka przedziału całkowania.

Wzory oparte na wielomianach Czebyszewa są mniej dokładne, niż wzory Newtona-Cotesa, zwłaszcza o niskim n . Stąd istnieje tendencja do stosowania wzorów Czebyszewa o większej liczbie rzędnych w jednym przedziale, niż to jest w przypadku wzorów równokrowych.

Tab. 5. Położenie węzłów t_i , mnożniki H_i , rząd dokładności m oraz błąd Δ wzorów na całkowanie w bazie Czebyszewa

n	m	i	t_i	H_i	Stała c
2	1	1, 2	$\pm \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-1/6$
3	3	1, 3	$\pm \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$2/9$	$-\frac{1}{240}$
		2	0	$5/9$	
4	3	1, 4	$\pm \cos 22,5^\circ \approx 0,9239$	0,132 148 869 8	$-6,9444 \cdot 10^{-4}$
		2, 3	$\pm \cos 67,5^\circ \approx 0,3827$	0,367 851 130 2	
5	5	1, 5	$\pm \cos 18^\circ \approx 0,9511$	0,083 890 614 2	$-8,2672 \cdot 10^{-6}$
		2, 4	$\pm \cos 54^\circ \approx 0,5878$	0,262 776 052 4	
		3	0	0,306 666 666 7	
6	5	1, 6	$\pm \cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	0,059 330 510 7	$-2,4802 \cdot 10^{-6}$
		2, 5	$\pm \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,188 888 888 9	
		3, 4	$\pm \cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	0,251 780 600 4	
8	7	1, 8	$\pm \cos 11,25^\circ \approx 0,9808$	0,033 491 472 8	$-6,1512 \cdot 10^{-9}$
		2, 7	$\pm \cos 33,75^\circ \approx 0,8315$	0,111 493 966 5	
		3, 6	$\pm \cos 56,25^\circ \approx 0,5556$	0,162 076 259 5	
		4, 5	$\pm \cos 78,75^\circ \approx 0,1951$	0,192 938 301 1	
9	9	1, 9	$\pm \cos 10^\circ \approx \pm 0,9848$	0,026 368 325 0	$-2,7960 \cdot 10^{-11}$
		2, 8	$\pm \cos 30^\circ = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,089 594 356 3	
		3, 7	$\pm \cos 50^\circ \approx \pm 0,6428$	0,132 018 611 3	
		4, 6	$\pm \cos 70^\circ \approx \pm 0,3420$	0,165 422 587 6	
		5	0	0,173 192 239 9	
10	9	1, 10	$\pm \cos 9^\circ \approx \pm 0,9877$	0,021 469 559 8	$-1,0873 \cdot 10^{-11}$
		2, 9	$\pm \cos 27^\circ \approx \pm 0,8910$	0,072 937 459 7	
		3, 8	$\pm \cos 45^\circ = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,110 158 730 2	
		4, 7	$\pm \cos 63^\circ \approx \pm 0,4540$	0,140 439 609 3	
		5, 6	$\pm \cos 81^\circ \approx \pm 0,1564$	0,154 994 641 0	

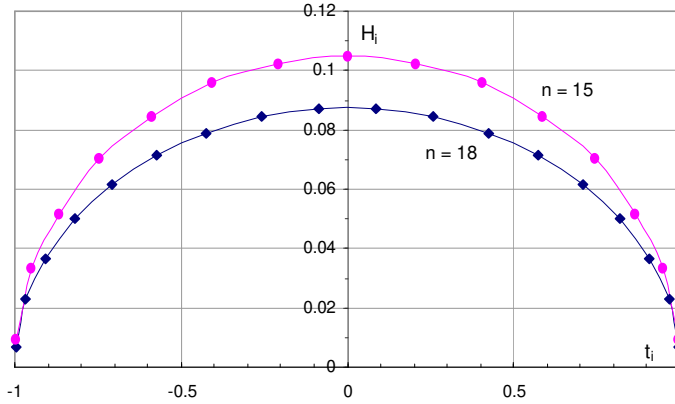
12	11	1, 12	$\pm \cos 7,5^\circ \approx \pm 0,9914$	0,014 922 634 2	$-1,4257 \cdot 10^{-14}$
		2, 11	$\pm \cos 22,5^\circ \approx \pm 0,9239$	0,051 252 716 5	
		3, 10	$\pm \cos 37,5^\circ \approx \pm 0,7934$	0,078 995 288 1	
		4, 9	$\pm \cos 52,5^\circ \approx \pm 0,6088$	0,104 270 884 9	
		5, 8	$\pm \cos 67,5^\circ \approx \pm 0,3827$	0,120 704 955 4	
		6, 7	$\pm \cos 82,5^\circ \approx \pm 0,1305$	0,129 853 520 9	
15	15	1, 15	$\pm \cos 6^\circ \approx \pm 0,9945$	0,009 541 916 1	$-2,6400 \cdot 10^{-20}$
		2, 14	$\pm \cos 18^\circ \approx \pm 0,9511$	0,033 165 374 2	
		3, 13	$\pm \cos 30^\circ = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,051 808 931 8	
		4, 12	$\pm \cos 42^\circ \approx \pm 0,7431$	0,070 497 833 3	
		5, 11	$\pm \cos 54^\circ \approx \pm 0,5878$	0,084 361 543 4	
		6, 10	$\pm \cos 66^\circ \approx \pm 0,4067$	0,095 986 248 8	
		7, 9	$\pm \cos 78^\circ \approx \pm 0,2079$	0,102 131 399 9	
		8	0	0,105 013 505 0	
18	17	1, 18	$\pm \cos 5^\circ \approx \pm 0,9962$	0,006 639 702 8	$-7,3787 \cdot 10^{-24}$
		2, 17	$\pm \cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	0,023 118 968 7	
		3, 16	$\pm \cos 25^\circ \approx \pm 0,9063$	0,036 541 911 2	
		4, 15	$\pm \cos 35^\circ \approx \pm 0,8192$	0,050 287 504 1	
		5, 14	$\pm \cos 45^\circ = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,061 540 565 5	
		6, 13	$\pm \cos 55^\circ \approx \pm 0,5736$	0,071 601 801 4	
		7, 12	$\pm \cos 65^\circ \approx \pm 0,4226$	0,079 011 800 3	
		8, 11	$\pm \cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	0,084 338 134 8	
		9, 10	$\pm \cos 85^\circ \approx \pm 0,0872$	0,086 919 611 2	

Wykres mnożników H_i w funkcji t_i dla $n = 15$ i 18 , przedstawiony jest na rys. 12. Widać, że: 1) H_i są symetryczne względem środka przedziału całkowania, 2) monotonicznie maleją w miarę oddalania się od środka, i 3) maleją ze wzrostem n , co wynika z faktu, że ΣH_i (rzędnych punktów) = 1, bez względu na ich liczbę. Linie na rysunku mają jedynie znaczenie edycyjne, by uwypuklić przebieg mnożników (punkty).

Mnożniki rzędnych H_i można wyznaczyć z ominięciem układu równań, jeśli powrócić do metody Lagrange'a – są równe całce wielomianów Lagrange'a $p_i(x)$, danych wzorem (2.2), w przedziale całkowania $\langle a, b \rangle$, co wynika ze wzoru (2.4), przy czym przedział całkowania może być dowolny. Problemem jest, jak pokazał Przykład 2, czy te całki potrafimy obliczyć ściśle, bez wymnażania jednomianów. Taki przypadek zachodzi jedynie dla węzłów, które są pierwiastkami wielomianów Legendre'a, co daje wzory Gaussa, wielomiany Czebyszewa nie są niestety ortogonalne dla funkcji wagowej $\theta(x) = 1$.

Jeśli chcemy ominąć układ (5.3), to wielomiany $p_i(x) \equiv p_i(t)$ musimy scałkować numerycznie wzorem zapewniającym wynik ścisły, jak w przykładzie na s. 13, lub cierpliwie wymnożyć wszystkie jednomiany, całkując otrzymany wielomian wyraz po wyrazie. To ostatnie podejście praktycznie odpada dla $n \geq 4$, ze względu na żmudne rachunki.

Pozostaje pierwszy sposób – wielomiany $p_i(t)$ całkujemy wzorem Gaussa z odpowiednio wysokim rzędem dokładności m .



Rys. 12

Chciałoby się w tym celu wykorzystać wielomiany Lagrange'a $p_i(x)$ w postaci (2.11), bo jest krótka. Wzór ten nie nadaje się jednak do obliczeń numerycznych (rachunkowych), bo wielomian w liczniku jest nieskrócony, co daje nieoznaczoność w punkcie $t = t_i$, ma on jedynie znaczenie teoretyczne, co wykorzystaliśmy w § 4. Co prawda wiemy, że w biegunie $t = t_i$ wielomian $p_i(t_i) = 1$, lecz w bliskim otoczeniu bieguna wzór (2.11) jest źle uwarunkowany numerycznie (występuje dzielenie małych wielkości), co skutkuje odbieganiem od rzeczywistych wartości wielomianów Lagrange'a $p_i(x)$. Z tego powodu w obliczeniach numerycznych musimy stosować wzór (2.7), zamiast (2.11).

We wzorze (2.7) uprościć możemy jedynie mianownik, który jest taki sam, jak we wzorze (2.11), równy $s'(t = t_i)$ – pochodnej wielomianu $s(t)$ w punkcie $t = t_i$, gdzie $s(t)$ jest iloczynem kolejnych jednomianów $(t - t_i)$ od $i = 1$ do n . Jeśli węzły t_i są pierwiastkami wielomianu Czebyszewa $T_n(t)$, to wielomian:

$$s(t) \equiv T_n(t)/a_n,$$

gdzie $a_n = 2^{n-1}$ jest współczynnikiem wiodącym przy najwyższej potędze wielomianu Czebyszewa. Mianownik wzoru (2.7) równa się więc:

$$s'(t = t_i) = T'_n(t = t_i)/a_n.$$

Obliczenie wartości mianownika wzoru (2.7) jest natychmiastowe, jeśli podstawić $t = \cos \theta$. Wówczas $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$, stąd:

$$T'_n(t) = \frac{dT_n}{dt} = \frac{d \cos n\theta}{d \cos \theta} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (17.6)$$

Podstawiając $t = t_i$, dane wzorem (17.1), mianownik wzoru (2.7) równa się:

$$s'(t = t_i) = \frac{n \sin n\theta_i}{2^{n-1} \sin \theta_i}, \quad (17.7)$$

gdzie $\theta_i = (2i - 1)(\frac{1}{2}\pi/n) \equiv \arccos t_i$.

Ze wzoru (2.8) wynika, że mnożnik H_i równa się połowie całki wielomianu $p_i(t)$ w przedziale $t \in \langle -1, 1 \rangle$. Jeśli mamy parzystą liczbę rzędnych, to do scałkowania wielomianów $p_i(t)$ należy przyjąć wzory Gaussa o liczbie rzędnych równej przynajmniej połowie rzędnych Czebyszewa. Przykładowo dla wyznaczenia mnożników dla 18 czy 20 rzędnych Czebyszewa wystarczy wzór Gaussa o 10 rzędnych. Zatem:

$$H_i = \sum_j H_j p_i(t_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.8)$$

gdzie sumowanie odbywa się po rzędnych Gaussa j w przedziale $t \in \langle -1, 1 \rangle$; stała $\frac{1}{2}$ we wzorze znika, bo długość przedziału całkowania wynosi 2. Mnożniki H_i uzyskane metodą całkowania wg wzoru (17.8) są tożsame z wynikami, jakie otrzymuje się z układu (5.3), podanymi w tabeli 5.

Zadania

1. Pokazać, że wielomiany Czebyszewa powiązane są związkiem rekurencyjnym:

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t),$$

gdzie wielkości początkowe, to $T_0 = 1$, $T_1(t) = t$.

R o z w i ą z a n i e. Stosując podstawienie $t = \cos \theta$, związek powyższy przybiera postać: $\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$. Przenosząc kosinusy wielokrotności kątów na jedną stronę, otrzymamy znaną tożsamość: $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ (§ 29).

2. Pokazać, że:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_k(t) dt &= 0, & k \text{ nieparzyste,} \\ &= 2/(1 - k^2), & k \text{ parzyste.} \end{aligned}$$

W s k a z ó w k a. Stosując podstawienie $t = \cos \theta$, całka powyższa przybiera postać:

$$\int_0^\pi \cos k\theta \sin \theta d\theta,$$

co oblicza się w znany sposób (§ 29), zamieniając iloczyn kosinusa i sinusa na sumę sinusów odpowiednich kątów.

3. Pokazać, że

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{2}\pi & k = n \neq 0 \\ \pi & k = n = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_0) & \cdots & T_{n-1}(t_0) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_1) & \cdots & T_{n-1}(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_{n-1}) & \cdots & T_{n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F(t_1) \\ \vdots \\ F(t_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (18.3)$$

Oznaczmy macierz współczynników przez V , wektor współczynników interpolacji przez A , a wektor wyrazów wolnych, czyli rzędne, przez F . Warunki interpolacyjne przyjmą postać:

$$VA = F.$$

Rozwiązaniem równania macierzowego jest:

$$A = V^{-1}F.$$

Zwróćmy uwagę, że rozmaite metody interpolacyjne różnią się jedynie macierzą współczynników V , czyli macierzą wartości bazy interpolacyjnej w zadanych węzłach interpolacji. Znajomość współczynników interpolacji $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ wyznacza wielomian interpolacyjny (18.2). Macierz V i wektor rzędnych F nie zależą od x , zatem wektor współczynników interpolacji jest także niezależny od x – elementy macierzy i obydwu wektorów są stałe.

Podstawiając wielomian interpolacyjny (18.2) do (18.1), możemy wykonać całkowanie. Wykorzystując wynik zadania 1 na s. 85, otrzymamy:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\sqrt{\frac{1}{2}} a_0 + \frac{a_2}{1-4} + \frac{a_4}{1-16} + \cdots + \frac{a_{2k}}{1-4k^2} \right), \quad (18.4)$$

gdzie a_{2k} jest ostatnim składnikiem parzystym. Problemem są współczynniki interpolacji A .

Przy dowolnym wyborze węzłów t_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, jedyną korzyścią, jaką daje wybór takiej bazy, jest to, że przy obliczaniu macierzy odwrotnej V^{-1} błędy zaokrągleń mają mniejszy wpływ, niż w przypadku interpolacji wielomianowej [3].

Jeśli jako węzły interpolacji przyjmiemy węzły Czebyszewa, jak w § 17:

$$t_i = \cos[(2i+1)(\frac{1}{2}\pi/n)], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (18.5)$$

(w stosunku do wzoru (17.1) jest tylko zmiana numeracji od 0 do $n-1$, a nie od 1 do n , jak na rys. 11), to obliczanie macierzy odwrotnej jest bardzo proste. W takim przypadku:

$$V^{-1} = (2/n)V^T. \quad (18.6)$$

Inaczej mówiąc, macierz współczynników V jest wówczas ortogonalna, tzn. iloczyn V

przez V^T daje macierz diagonalną o stałych wyrazach na przekątnej głównej, czyli $VV^T = \text{stała } I$, gdzie I jest macierzą jednostkową, zaś $\text{stała} = 2/n$. Oznacza to także, że iloczyn skalarny dwóch dowolnych wierszy czy kolumn zeruje się, z wyjątkiem kwadratu wierszy czy kolumn, który jest stały. Dowód nie jest trudny, można go znaleźć w wielu książkach, np. [3] czy Wikipedii. Ortogonalność macierzy V wynika z tożsamości:

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_p(t_k) T_q(t_k) = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \frac{1}{2}n, & p = q \neq 0 \\ n, & p = q = 0 \end{cases}.$$

Ponieważ kwadrat początkowej kolumny V daje n , a nie $\frac{1}{2}n$, z tego względu kolumna ta musi zawierać $1/\sqrt{2}$, zamiast 1. W przeciwnym przypadku, element początkowy na głównej przekątnej macierzy diagonalnej VV^T wynosiłby n , a nie $\frac{1}{2}n$. Dzięki temu prostemu zabiegowi macierz odwrotna V^{-1} wyraża się prostym wzorem (18.6).

Uwzględniając (18.6), współczynniki interpolacji wyraża się wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{2}{n} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ T_1(t_0) & T_1(t_1) & \cdots & T_1(t_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n-1}(t_0) & T_{n-1}(t_1) & \cdots & T_{n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F(t_1) \\ \vdots \\ F(t_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (18.7)$$

Prawa strona wzoru (18.4) jest iloczynem skalarnym wektora $h[1/\sqrt{2}, 0, 1/(1-3), 0, 1/(1-16), \dots]$ i wektora współczynników interpolacji A (18.7). Stąd:

$$\int_a^b f(x) dx = h[1/\sqrt{2}, 0, 1/(1-4), 0, 1/(1-16), \dots] \frac{2}{n} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ T_1(t_0) & T_1(t_1) & \cdots & T_1(t_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n-1}(t_0) & T_{n-1}(t_1) & \cdots & T_{n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F(t_1) \\ \vdots \\ F(t_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Iloczyn wektora i macierzy jest wektorem M , zawierającym n elementów, których numery zmieniają się od $i = 0$ do n ; i -ty element tego wektora wyraża się wzorem:

$$M_i = \frac{h}{n} \left[1 - 2 \sum \frac{T_k(t_i)}{k^2 - 1} \right],$$

gdzie sumowanie odbywa się po parzystych k , od $k = 2$ do ostatniego składnika parzystego, a t_i określone jest wzorem (18.5). Całka (18.1) wyrazi się wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum M_i F(t_i),$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich rzędnych od $i = 0$ do $n-1$. Uwzględniając, że bezwymiarowe mnożniki $H_i = M_i/h$, stąd:

$$H_i = \frac{1}{n} \left[1 - 2 \sum \frac{T_k(t_i)}{k^2 - 1} \right], \quad (18.8)$$

gdzie sumowanie odbywa się po *parzystych* k , od $k = 2$ do ostatniego składnika parzystego lub w równoważnej postaci szeregu kosinusów:

$$H_i = \frac{1}{n} \left[1 - 2 \sum \frac{\cos k\theta_i}{k^2 - 1} \right],$$

gdzie $\theta_i = \arccos t_i$.

Wzór na całkowanie przyjmie więc postać:

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum H_i f(x_i), \quad (18.9)$$

gdzie x_i określone jest wzorem (17.2). Widzimy, że bezwymiarowe mnożniki H_i nie zależą od długości przedziału całkowania. Ponadto mnożniki te dane są wzorem analitycznym (18.8), który nie wymaga rozwiązywania żadnych równań. Stąd jest łatwość stosowania tej metody dla dowolnej liczby rzędnych w jednym podprzedziale. Z tego powodu bywa, że nawet długi przedział nie jest dzielony na podprzedziały, lecz w całym przedziale stosuje się wzór (18.9) o dowolnie dużej liczbie rzędnych, nawet ponad 1000 [3]. W takim przypadku, by uniknąć wielokrotnego obliczania kosinusów coraz wyższych wielokrotności, parzyste $T_k(t)$ należy obliczać, stosując wzór rekurencyjny z krokiem 2. Mnożniki H_i , dane analitycznym wzorem (18.8), są tożsame z wynikami podanymi w tabeli 5. Jak widać, zależą od rozstawu rzędnych w przedziale, a nie od sposobu interpolacji funkcji.

Zadania

1. Napisać macierz wartości funkcji bazowych V dla układu węzłów, jak na rys. 11.

R o z w i ą z a n i e. Mamy 5 węzłów Czebyszewa. Stąd:

$$V = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_0) & T_2(t_0) & T_3(t_0) & T_4(t_0) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_1) & T_2(t_1) & T_3(t_1) & T_4(t_1) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_2) & T_2(t_2) & T_3(t_2) & T_4(t_2) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_3) & T_2(t_3) & T_3(t_3) & T_4(t_3) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & T_1(t_4) & T_2(t_4) & T_3(t_4) & T_4(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \cos 18^\circ & \cos 36^\circ & \cos 54^\circ & \cos 72^\circ \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \cos 54^\circ & \cos 108^\circ & \cos 162^\circ & \cos 216^\circ \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \cos 90^\circ & \cos 180^\circ & \cos 270^\circ & \cos 360^\circ \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \cos 126^\circ & \cos 252^\circ & \cos 378^\circ & \cos 504^\circ \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \cos 162^\circ & \cos 324^\circ & \cos 486^\circ & \cos 648^\circ \end{bmatrix}.$$

2. Sprawdzić numerycznie, że macierz V z zadania 1 jest macierzą ortogonalną.

R o z w i ą z a n i e. Macierz jest macierzą ortogonalną, jeśli jej iloczyn przez macierz transponowaną daje macierz diagonalną, tj. $VV^T = \text{stała } I$. Macierz transponowana jest

to macierz, w której kolumny (wiersze) macierzy oryginalnej stają się wierszami (kolumnami) macierzy transponowanej. Zatem:

$$V^T = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos 18^\circ & \cos 54^\circ & \cos 90^\circ & \cos 126^\circ & \cos 162^\circ \\ \cos 36^\circ & \cos 108^\circ & \cos 180^\circ & \cos 252^\circ & \cos 324^\circ \\ \cos 54^\circ & \cos 162^\circ & \cos 270^\circ & \cos 378^\circ & \cos 486^\circ \\ \cos 72^\circ & \cos 216^\circ & \cos 360^\circ & \cos 504^\circ & \cos 648^\circ \end{bmatrix}.$$

Najpierw musimy zapisać macierz V w Excelu w formacie cyfrowym jako tablicę w polu komórek 5×5, jak poniżej. Dla ułatwienia, w dwóch pierwszych kolumnach podane są kąty występujące w pierwszej kolumnie. Liczba cyfr wyświetlanych nie ma znaczenia. Następnie w dowolnym polu komórek 5×5 (tutaj tuż obok) musimy zapisać macierz transponowaną V^T , kopiując wiersz po wierszu macierzy V i wklejając do nowej macierzy V^T , jednocześnie transponując je na kolumny.

Następnie możemy wymnożyć obie macierze za pomocą polecenia =MACIERZ.ILO-CZYN w górnym lewym polu nowej macierzy (tablicy). Otworzy się wówczas okienko dialogowe, w którym wskazujemy tablice, które mają być wymnożone, przeciągając kursorem od górnego lewego rogu tablicy do dolnego prawego rogu. Po wciśnięciu OK pojawi się element jedynie w górnym lewym polu nowej macierzy. By uzyskać pozostałe elementy, zaznaczamy pole nowej macierzy, zaczynając od lewego górnego rogu, a kończąc na dolnym prawym. Następnie w górnym lewym rogu klikamy klawisz F2, a po nim Shift+Ctrl+Enter. Powinna ukazać się reszta wyrazów tablicy, jak poniżej.

stopnie	radiany	V					V^T				
18	0.31416	0.707107	0.951057	0.809017	0.587785	0.309017	0.707107	0.707107	0.707107	0.707107	0.707107
54	0.94248	0.707107	0.587785	-0.309017	-0.951057	-0.809017	0.951057	0.587785	6.13E-17	-0.587785	-0.951057
90	1.57080	0.707107	6.13E-17	-1	0.000000	1	0.809017	-0.309017	-1	-0.309017	0.809017
126	2.19911	0.707107	-0.587785	-0.309017	0.951057	-0.809017	0.587785	-0.951057	0.000000	0.951057	-0.587785
162	2.82743	0.707107	-0.951057	0.809017	-0.587785	0.309017	0.309017	-0.809017	1	-0.809017	0.309017
		macierz diagonalna VV^T					V^TV				
		2.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	2.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2.5	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	2.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2.5	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	2.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2.5	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2.5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	2.5

Rys. 13. Zrzut fragmentu ekranu z Excela

Jak widać, otrzymaliśmy macierz diagonalną z liczbą 2,5 na głównej przekątnej, równej $\frac{1}{2}n$, gdzie $n = 5$, tak jak powinno być. Poza główną przekątną, występują śladowe wartości, rzędu 10^{-17} ÷ 10^{-16} , będące wynikiem obcięcia. Identyczną macierz otrzymamy, gdy zmienimy kolejność mnożenia, co widać u dołu rys. 13 po prawej stronie. Normalnie kolejność mnożenia ma znaczenie, z wyjątkiem mnożenia przez macierz odwrotną i macierz ortogonalną, jak w tym przypadku.

§ 19. Całkowanie funkcji osobliwych metodą Gaussa

Omówimy teraz całkowanie funkcji z wagą $\theta(x)$ wg ogólnego wzoru (1.3), stosowane do całkowania funkcji osobliwych. Skupimy się na metodach Gaussa, czyli wzorach o najwyższych rzędach dokładności:

$$\int_a^b \theta(x) g(x) dx = \sum_{i=1}^n M_i g(x_i) + \Delta. \quad (19.1)$$

Do wyznaczania węzłów i mnożników służy układ równań (3.4), który jest układem nieliniowym. Stąd bardzo trudnym do rozwiązania zwykłymi metodami. Mając n rzędnych w metodzie Gaussa, żąda się, aby n mnożników i n węzłów spełniało $2n$ równań w układzie (5.3). Wynika stąd, że rząd dokładności tych wzorów wynosi $m = \max k = 2n - 1$, ze względu na funkcję regularną $g(x)$.

Podstawiając we wzorze (19.1) $g(x) \equiv 1$, otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^n M_i = \int_a^b \theta(x) dx, \quad (19.2)$$

tj. że suma mnożników równa się całce z funkcji wagowej. Pamiętamy, że w przypadku całkowania funkcji regularnych, $\theta(x) \equiv 1$, suma mnożników równa się długości przedziału całkowania $b - a$.

W § 4 wykazaliśmy, że węzły x_i w metodzie Gaussa są pierwiastkami odpowiedniego wielomianu ortogonalnego $G_n(x)$, którego postać zależy od przedziału całkowania $\langle a, b \rangle$ i funkcji wagowej $\theta(x)$. Znając położenie węzłów, wyznaczenie mnożników M_i z układu (3.4) nie przedstawia już większych trudności, o ile prawą stronę równań da się łatwo obliczyć analitycznie. Można ponadto pokazać, że gdy funkcja wagowa $\theta(x)$ jest dodatnio określona, to wszystkie mnożniki M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są dodatnie, a punkt η we wzorze (3.6), określającym błąd metody Δ , leży wewnątrz przedziału całkowania. Znając wielomian ortogonalny, nie musimy korzystać z układu (3.4). Błąd metody Δ i mnożniki możemy znaleźć z pomocą wzorów analitycznych (4.2) i (4.5).

A oto najczęściej spotykane całki funkcji z wagą.

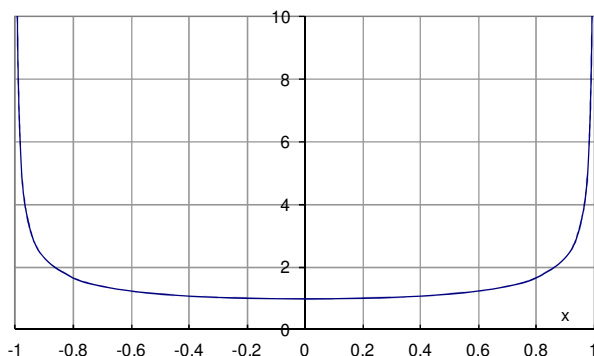
a) Wzory Czebyszewa I

Wzory te dotyczą całkowania całek typu:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (19.3)$$

Funkcja podcałkowa ma asymptoty pionowe w punktach $x = \pm 1$ (rys. 14). Jest to więc funkcja osobliwa, która nie nadaje się do całkowania numerycznego zwykłymi metodami. Wydzielamy zatem funkcję wagową $\theta(x) = 1/(1-x^2)^{1/2}$ (odwrotność półokręgu) zawierającą osobliwość i funkcję regularną $g(x)$. Wielomianami ortogonalnymi w przedziale

$\langle -1, 1 \rangle$, z powyższą funkcją wagową, są wielomiany Czebyszewa (I rodzaju) $T_n(x)$, omówionymi w § 17. Dowód ortogonalności pokazany jest w zadaniu 3 na s. 85.



Rys. 14. Funkcja wagowa $\theta(x) = 1/(1 - x^2)^{1/2}$

Wzór na całkowanie (19.3) dany jest ogólnym wzorem (1.3), przywołanym wyżej jako wzór (19.1), gdzie $x_i \equiv t_i$ są pierwiastkami wielomianu $T_n(t)$, danymi wzorem (17.1).

Mnożniki M_i można obliczyć z analitycznego wzoru (4.5), gdyż wielomian ortogonalny $G_n(x) \equiv T_n(x)$. Wzór (4.5) przybiera postać:

$$M_i = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{T'_n(x_i) T_{n-1}(x_i)} \int_{-1}^1 \frac{T_{n-1}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

W przypadku wielomianów Czebyszewa iloraz $a_n/a_{n-1} = 2$. Podstawiając w całce za $x = \cos \theta$, a za $dx = -\sin \theta d\theta$, otrzymamy:

$$M_i = \frac{2}{T'_n(x_i) T_{n-1}(x_i)} \int_0^\pi \cos^2(n-1)\theta d\theta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Całka kwadratu kosinusa równa się $\frac{1}{2}\pi$. Tak więc:

$$M_i = \frac{\pi}{T'_n(x_i) T_{n-1}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Problemem jest obliczenie mianownika w miejscach zerowych $T_n \equiv \cos n\theta$, danych wzorem (17.1). Korzystając ze wzoru (17.6) na pochodną wielomianu, w kategoriach zmiennej θ , wzór powyższy przyjmuje postać:

$$M_i = \frac{\sin \theta_i}{n \sin \theta_i \cos(n-1)\theta_i} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19.4)$$

gdzie $\theta_i = (2i - 1)(\frac{1}{2}\pi/n)$. Korzystając z tożsamości w § 29, iloczyn przyjmie postać:

$$\sin n\theta \cos(n-1)\theta = \frac{1}{2}[\sin \theta + \sin(2n-1)\theta].$$

Uwzględniając ten związek, mianownik wzoru (19.4) przyjmie postać:

$$\frac{1}{2}n[1 + \sin(2n-1)\theta_i/\sin \theta_i].$$

Wprowadzając skrócony zapis na $\theta_i = j\pi/2n$, gdzie $j = (2i - 1)$ jest liczbą nieparzystą 1, 3, ..., iloraz sinusów przyjmie postać:

$$\sin(2n-1)\theta_i/\sin \theta_i = \sin(j\pi - \theta_i)/\sin \theta_i = 1.$$

Uwzględniając ten wynik, mianownik wzoru (19.4) redukuje się do n . Tak więc:

$$M_i = \pi/n, \quad (19.5)$$

mnożniki M_i są więc stałe. Wzór na całkowanie numeryczne przyjmie zatem postać:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) + \Delta. \quad (19.6)$$

Błąd metody Δ można wyznaczyć ze wzoru (4.2). Uwzględniając, że $G_n = T_n$, zaś $a_n = 2^{n-1}$, otrzymamy:

$$\Delta = \frac{g^{(2n)}(\eta)}{(2n)!2^{2n-2}} \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Całka równa się $\frac{1}{2}\pi$, co otrzymuje się, podstawiając $x = \cos \theta$. Stąd:

$$\Delta = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} g^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (19.7)$$

W zastosowaniach występuje także funkcja wagowa typu $[(x-a)(b-x)]^{1/2}$ lub jej odwrotność. Stosując podstawienie (17.2), otrzymamy:

$$\begin{aligned} x-a &= \frac{1}{2}(b-a)(1+t), \\ b-x &= \frac{1}{2}(b-a)(1-t), \end{aligned}$$

stąd:

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{1-t^2}. \quad (19.8)$$

W przypadku całek typu:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx,$$

widzimy, że funkcja podcałkowa ma asymptoty pionowe na krańcach przedziału całkowania. Podstawienie (17.2) daje $dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$, przekształca przedział $\langle a, b \rangle$ w przedział

$\langle -1, 1 \rangle$. Uwzględniając (19.8) i wprowadzając oznaczenie $g(t) = g[x(t)]$, całka powyższa przyjmie postać:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad (19.9)$$

jak we wzorze (19.3), której postać numeryczna dana jest wzorem (19.6).

PRZYKŁAD 17. Obliczyć numerycznie dokładną wartość całki:

$$J = \int_{-1}^1 \frac{x^8}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

R o z w i ą z a n i e . Całkę tę można obliczyć za pomocą metody Gaussa-Czebyszewa I wg wzoru (19.6). Aby otrzymać wynik dokładny, błąd $\Delta = 0$. W tym przypadku ma to miejsce, gdy liczba rzędnych $n \geq 5$. Rzędne x_i^8 znajdują się w punktach $x_i \equiv t_i$, danych wzorem (17.1). Sumując je, a sumę mnożąc przez π/n , otrzymamy dokładną wartość całki. Do obliczeń wystarczy wziąć $n = 5$ rzędnych. Otrzymamy $J = 0,859\,029 \dots$, co jest tożsame z $^{35}/_{128} \pi$.

Zadania

1. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

R o z w i ą z a n i e . Funkcja podcałkowa jest symetryczna, stąd:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Dzięki temu możemy ją obliczyć za pomocą metody Gaussa-Czebyszewa I, stosując wzór (19.6). Położenie węzłów dane jest wzorem (17.1). Obierając 5 rzędnych, otrzymamy $J = 1,201\,969\,7$. Wartość dokładna $J = 1,201\,969\,7\dots$. Choć obraliśmy tylko 5 rzędnych, obydwa wyniki są praktycznie identyczne.

2. Obliczyć całkę:

$$J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

R o z w i ą z a n i e . Funkcję podcałkową rozkładamy na czynniki:

$$J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pierwszy czynnik jest funkcją wagową $\theta(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, a drugi jest funkcją regularną $g(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$. Funkcja ta nie jest wielomianem, co wiąże się z występowaniem błędu. Zmienia się jednak w wąskim przedziale od 1 w zerze do $1/\sqrt{2}$ na krańcach przedziału całkowania. Dzięki temu możemy ją obliczyć za pomocą metody Gaussa-Czebyszewa I, stosując wzór (19.6). Obierając 5 rzędnych, otrzymamy $J = 2,622\,25$. Wartość dokładna $J = 2,622\,057\,554\dots$. Widzimy, że czwarte miejsce dziesiętne jest niedokładne. By zwiększyć dokładność, należałoby wziąć więcej rzędnych. Gdy weźmiemy 9 rzędnych, otrzymamy $J = 2,622\,057\,7$. Różnica jest dopiero na 7. miejscu dziesiętnym.

3. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa ma asymptotę pionową w zerze. Dlatego nie można zastosować wzorów dla funkcji regularnych. Musimy więc wyrugować osobliwość funkcji podcałkowej za pomocą odpowiedniego podstawienia. Podstawmy $\sin x = t^2$. Stąd $\cos x dx = 2t dt$. Podstawiając do całki, otrzymamy:

$$J = \int_0^1 \frac{2t dt}{\cos x} = \int_0^1 \frac{2t dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Uwzględniając symetryczność, całka ta jest taka sama, jak w zadaniu 2, tj. $J = 2,622\,057\,7$.

4. Pokazać, że całka:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$$

jest tożsama z całką z zadania 3.

W s k a z ó w k a: zastosować podstawienie $x = \frac{1}{2}\pi - t$.

5. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

R o z w i ą z a n i e. Wyrażenie pod pierwiastkiem rozkładamy na czynniki:

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^2}{1+x^4} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

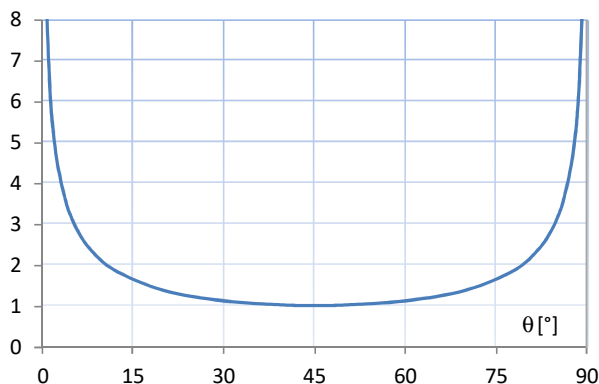
Pierwszy czynnik jest funkcją wagową, jak w metodzie Gaussa-Czebyszewa I, a iloczyn dwóch ostatnich ułamków jest funkcją regularną $g(x)$. Możemy więc ją obliczyć stosując wzór (19.6). Obierając 6 rzędnych, otrzymamy $J = 0,392\,659\,2$. Wartość do-

kładna: $J = 0,392\,699\,08\dots$. Widzimy, że piąte miejsce dziesiętne jest niedokładne. Gdy weźmiemy 10 rzędnych, otrzymamy $J = 0,392\,698\,6$. Różnica jest na 6. miejscu dziesiętnym.

6. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos \theta + \sin \theta) \sqrt{\cos \theta \sin \theta}}.$$

R o z w i ą z a n i e. Wykres funkcji podcałkowej (rys. 15) jest symetryczny względem $\theta = 45^\circ$, gdzie osiąga minimum równe 1. Na krańcach przedziału całkowania występują osobliwości, które daje iloczyn $\cos \theta \sin \theta$.



Rys. 15

Całkę powyższą można obliczyć analitycznie, bez uciekania się do funkcji pierwotnej, co omówimy w zadaniu 7 na s. 163. Teraz obliczymy ją numerycznie. Osobliwość w sąsiedztwie zera jest typu $1/\sqrt{\theta}$, zaś na drugim końcu – typu $1/\sqrt{(1/2\pi - \theta)}$. Za funkcję wagową możemy więc przyjąć $1/[\theta \cdot (1/2\pi - \theta)]^{1/2}$. Wyrażenie na J , przydatne do numerycznego całkowania wzorami Gaussa-Czebyszewa I, przyjmie zatem postać:

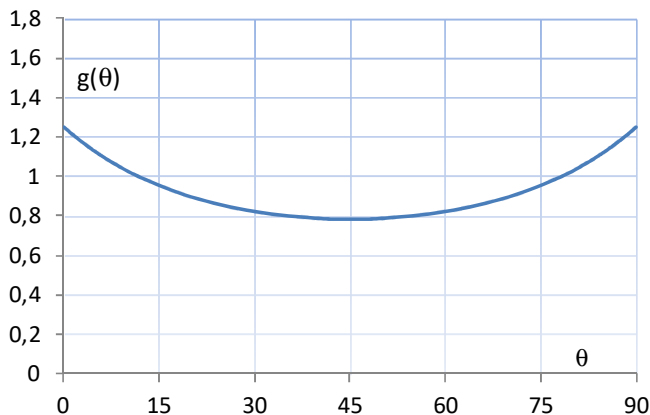
$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta) \sqrt{\cos \theta \sin \theta}} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}}.$$

Dwa pierwsze wyrażenia tworzą funkcję regularną $g(\theta)$:

$$g(\theta) = \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta) \sqrt{\cos \theta \sin \theta}} \sqrt{\theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}.$$

Jej wykres pokazany jest na rys. 16. Jest to krzywa symetryczna względem $\theta = 45^\circ$, rze-

czywiście regularna, przyjmująca na krańcach wartość $\sqrt{\pi}/2$, a pośrodku wartość minimalną, równą $\pi/4$. Całkę w tej postaci możemy obliczyć za pomocą wzoru (19.9). Wynik może być nawet ścisły, jeśli błąd metody $\Delta = 0$. Całki na J nie musimy transponować, co sugeruje wzór (19.9). W tym przypadku wzór Czebyszewa I możemy zastosować bezpośrednio:



Rys. 16. Funkcja regularna $g(\theta)$

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{g(\theta)}{\sqrt{\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}} d\theta = \pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta_i) + \Delta,$$

gdzie θ_i dane są wzorem (17.2), który przyjmuje tu postać $\theta_i = 45^\circ(1 + t_i)$, zaś t_i są pierwiastkami równania $\cos nt = 0$, danymi wzorem (17.1). Prościej mówiąc, θ_i odpowiadają rzutom na oś θ środków jednakowych łuków, na które podzielony został półokrąg o średnicy 90° , leżący na osi θ (rys. 11).

Z powyższego wzoru widać, że J równa się π razy średnia rzędna brana do obliczeń. Wzór jest szybko zbieżny. Już dla $n \geq 3$ średnia rzędna jest stała, równa 1, co daje ścisłą wartość równą $J = \pi$.

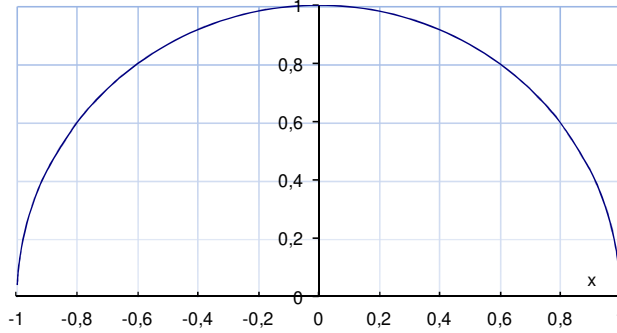
b) Wzory Czebyszewa II

Wzory te dotyczą obliczania całek typu:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} g(x) dx. \quad (19.10)$$

Funkcja podcałkowa ma styczne pionowe w punktach $x = \pm 1$ (rys. 17). Jest to więc funkcja osobliwa, która nie nadaje się do całkowania numerycznego zwykłymi metodami. Wydzielamy zatem funkcję wagową $\theta(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ (jest nią półokrąg), zawierającą

osobliwość, i funkcję regularną $g(x)$. Wielomianami ortogonalnymi w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, z powyższą funkcją wagową, są wielomiany *Czebyszewa II rodzaju* (patrz § 29). Dowód ortogonalności pokazany jest w zadaniu 1 na s. 101.



Rys. 17. Funkcja wagowa $\theta(x) = (1 - x^2)^{1/2}$

Wzór na całkowanie (19.10) dany jest ogólnym wzorem (19.1), gdzie $x_i \equiv t_i$ są pierwiastkami wielomianu $U_n(t)$. Znajdziemy je z rozwiązania równania $U_n(t) = 0$, gdzie t jest zmienną z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$. Podstawiając $t = \cos \theta$, w kategoriach kąta równanie to przyjmie postać $\sin(n+1)\theta/\sin \theta = 0$, co redukuje się do równania $\sin(n+1)\theta = 0$. Spełniają je argumenty:

$$(n+1)\theta_i = i\pi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Stąd: $\theta_i = i\pi/(n+1),$

co definiuje położenie węzłów w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$:

$$t_i = \cos [i\pi/(n+1)], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19.11)$$

Mnożniki M_i można obliczyć ze wzoru (4.5), gdyż wielomian ortogonalny jest znany, równy $G_n(x) \equiv U_n(x)$. Wzór (4.5) przybiera postać:

$$M_i = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{U'_n(x_i)U_{n-1}(x_i)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{n-1}^2(x) dx.$$

Także i w tym przypadku iloraz $a_n/a_{n-1} = 2$. Podstawiając w całce $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$, otrzymamy:

$$M_i = \frac{2}{U'_n(x_i)U_{n-1}(x_i)} \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Całka kwadratu sinusa jest stałą, równą $\frac{1}{2}\pi$. Tak więc:

$$M_i = \frac{\pi}{U'_n(x_i)U_{n-1}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Problemem jest obliczenie mianownika w miejscach zerowych $x_i \equiv t_i$, danych wzorem (19.11). Korzystając z zadania 4, gdzie obliczona jest pochodna wielomianu $U'_n(x)$, iloczyn $U'_n(x)U_{n-1}(x)$ przyjmie postać:

$$U'_n(x)U_{n-1}(x) = \frac{xU_n(x) - (n+1)T_{n+1}(x)}{1-x^2} U_{n-1}(x).$$

Jeśli za x podstawimy odcięte węzłów x_i , to odpadnie $U_n(x)$, gdyż zeruje się w węzłach. Stąd:

$$U'_n(x_i)U_{n-1}(x_i) = \frac{-(n+1)T_{n+1}(x_i)}{1-x_i^2} U_{n-1}(x_i).$$

Stosując podstawienie $x_i = \cos \theta_i$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} U'_n(x_i)U_{n-1}(x_i) &= -\frac{n+1}{\sin^3 \theta_i} \cos(n+1)\theta_i \sin \theta_i = -\frac{n+1}{2\sin^3 \theta_i} [\sin(2n+1)\theta_i - \sin \theta_i] \\ &= -\frac{n+1}{2\sin^2 \theta_i} \left[\frac{\sin(2n+1)\theta_i}{\sin \theta_i} - 1 \right] = \frac{n+1}{2\sin^2 \theta_i} \left[1 - \frac{\sin(2n+1)\theta_i}{\sin \theta_i} \right]. \end{aligned}$$

Łatwo pokazać, że:

$$\sin(2n+1)\theta_i / \sin \theta_i = \sin(2\pi - \theta_i) = -\sin \theta_i.$$

Stąd:

$$U'_n(x_i)U_{n-1}(x_i) = \frac{n+1}{\sin^2 \theta_i}.$$

Zatem mnożniki rzędnych wyrażą się ostatecznie wzorem:

$$M_i = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{\pi}{n+1} i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19.12)$$

Wzór na całkowanie numeryczne przyjmie zatem postać:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} g(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin^2 \left(\frac{\pi}{n+1} i \right) g(x_i) + \Delta, \quad (19.13)$$

gdzie x_i dane jest wzorem (19.11).

Błąd metody Δ można wyznaczyć ze wzoru (4.2). Uwzględniając, że $G_n(x) \equiv U_n(x)$, zaś $a_n = 2^n$, otrzymamy:

$$\Delta = \frac{g^{(2n)}(\eta)}{(2n)! 2^{2n}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n^2(x) dx.$$

Całka równa się $\frac{1}{2}\pi$, co otrzymuje się, podstawiając $x = \cos \theta$. Stąd:

$$\Delta = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!} g^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (19.14)$$

PRZYKŁAD 18. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cos x dx.$$

R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa jest symetryczna, stąd:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cos x dx.$$

Dzięki temu możemy ją obliczyć za pomocą metody Gaussa-Czebyszewa II, stosując wzór (19.13). Rzędne $\cos x_i$ znajdują się w punktach $x_i \equiv t_i$, danych wzorem (19.11). Obierając 5 rzędnych, otrzymamy $J = 0,691\,2298$. Wartość dokładna: $J = 0,6912298\dots$ Choć obraliśmy tylko 5 rzędnych, obydwa wyniki są identyczne. Wynika to stąd, że w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ funkcja kosinus jest bardzo dobrze aproksymowana wielomianem 4. stopnia, a rząd dokładności wzoru o pięciu rzędnych wynosi $m = 9$. Dokładny wynik otrzymalibyśmy już przy trzech rzędnych.

W przypadku całek typu:

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} g(x) dx$$

funkcja podcałkowa ma asymptoty pionowe na krańcach przedziału całkowania. Podstawienie (17.2) daje $dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$, przekształca przedział $\langle a, b \rangle$ w przedział $\langle -1, 1 \rangle$. Uwzględniając (19.8), całka przyjmie postać:

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} g(x) dx = \left(\frac{1}{2}h\right)^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} g(t) dt, \quad (19.15)$$

jak we wzorze (19.10), której postać numeryczna dana jest wzorem (19.13), gdzie $h = b-a$ jest długością oryginalnego przedziału całkowania.

Zadania

1. Pokazać, że:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{k-1}(t) U_{n-1}(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{2} \pi & k = n \end{cases}.$$

D o w ó d. Stosując podstawienie $t = \cos \theta$, całka powyższa przybiera postać:

$$\int_0^\pi \sin k\theta \sin n\theta d\theta.$$

Gdy $k = n$, równa się $\frac{1}{2}\pi$, co można obliczyć w pamięci. Gdy $k \neq n$, oblicza się ją analogicznie, jak w zadaniu 3 na s. 85, zamieniając iloczyn sinusów na sumę kosinusów odpowiednich kątów (patrz (§ 29)). Stąd:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin k\theta \sin n\theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(k-n)\theta - \cos(k+n)\theta] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} [\sin(k-n)\theta]_0^\pi / (k-n) - \sin(k+n)\theta / (k+n) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

2. Obliczyć $T'_n(t)$.

R o z w i ą z a n i e. Korzystając ze wzoru (17.6), otrzymamy:

$$T'_n(t) = \frac{dT_n}{dt} = \frac{d \cos n\theta}{d \cos \theta} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} = n U_{n-1}(t).$$

3. Obliczyć $T''_n(t)$.

R o z w i ą z a n i e. Różniczkując pierwszą pochodną, otrzymamy:

$$T''_n(t) = \frac{dT'_n}{dt} = \frac{nd(\sin n\theta / \sin \theta)}{d \cos \theta},$$

czyli
$$T''_n(t) = n \frac{\sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta}{\sin^3 \theta}.$$

Przechodząc z powrotem na wielomiany Czebyszewa, otrzymamy:

$$T''_n(t) = n \frac{t U_{n-1}(t) - n T_n(t)}{1-t^2} = n U'_{n-1}(t).$$

4. Obliczyć $U'_n(t)$.

R o z w i ą z a n i e. Skracając ostatnią równość w zadaniu 3 przez n , otrzymamy:

$$U'_{n-1}(t) = \frac{t U_{n-1}(t) - n T_n(t)}{1-t^2}.$$

Stąd:
$$U'_n(t) = \frac{t U_n(t) - (n+1) T_{n+1}(t)}{1-t^2}.$$

5. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cosh x \, dx.$$

R o z w i ą z a n i e. Funkcja podcałkowa jest symetryczna, stąd:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cosh x \, dx.$$

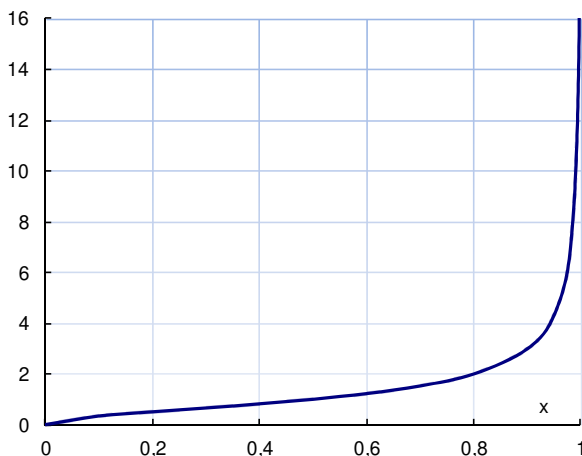
Dzięki temu możemy ją obliczyć za pomocą metody Gaussa-Czebyszewa II, stosując wzór (19.13). Rzędne $\cosh x_i$ znajdują się w punktach $x_i \equiv t_i$, danych wzorem (19.11). Obierając 5 rzędnych, otrzymamy $J = 0,8877498$. Wartość dokładna $J = 0,8877498\dots$ Choć obraliśmy tylko 5 rzędnych, obydwa wyniki są identyczne. Wynika to stąd, że w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ funkcja kosinus hiperboliczny jest bardzo dobrze aproksymowana wielomianem 4. stopnia, a rząd dokładności wzoru o pięciu rzędnych wynosi $m = 9$. Dokładny wynik otrzymalibyśmy już przy trzech rzędnych.

c) Wzory z wagą $[x/(1-x)]^{1/2}$

Wzory te dotyczą całkowania całek typu:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} g(x) \, dx. \quad (19.16)$$

Funkcja podcałkowa ma asymptotę pionową w punkcie $x = 1$ (rys. 18).



Rys. 18. Funkcja wagowa $\theta(x) = [x/(1-x)]^{1/2}$

Jest to więc funkcja osobliwa, która nie nadaje się do numerycznego całkowania zwykłymi metodami. Funkcją wagową, zawierającą osobliwość, jest $\theta(x) = [x/(1-x)]^{1/2}$. Wielomianami ortogonalnymi w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ z tą funkcją wagową są wielomiany:

$$G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} T_n(\sqrt{x}) = \frac{T_n(t)}{t} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystych,}$$

gdzie $t = x^{1/2}$. Dowód podany jest w zadaniu 2 na s. 105. Węzły wyznaczają pierwiastki wielomianu ortogonalnego $G_n(x) = 0$. Znajdują się więc w punktach $t_i \equiv x_i^{1/2}$, które są pierwiastkami wielomianu nieparzystego $T_n(t)$, danymi wzorem (17.1). Zatem:

$$x_i = \cos^2(2i-1)\frac{\pi}{2n} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19.17)$$

Mnożniki M_i można obliczyć ze wzoru (4.5), gdyż wielomian ortogonalny jest znany, równy $G_n(x) \equiv x^{-1/2} T_n(\sqrt{x})$ dla n nieparzystych. We wzorze (4.5) $n-1$ zastępujemy przez $n-2$, gdyż pod uwagę bierzemy tylko nieparzyste wielomiany. Stąd $a_n/a_{n-2} = 4$. Tak więc wzór (4.5) przybiera postać:

$$M_i = \frac{4}{G'_n(x_i)G_{n-2}(x_i)} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} G_{n-2}^2(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Uwzględniając, że:

$$\begin{aligned} G_{n-2}(x) &\equiv x^{-1/2} T_{n-2}(\sqrt{x}) \\ G'_n(x) &\equiv [x^{-1/2} T_n(\sqrt{x})]' = -1/2 x^{-3/2} T_n(\sqrt{x}) + x^{-1/2} T'_n(\sqrt{x}) 1/2 x^{-1/2}. \end{aligned}$$

Podstawiając za $x = x_i$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} G_{n-2}(x_i) &\equiv x_i^{-1/2} T_{n-2}(\sqrt{x_i}) \\ G'_n(x_i) &= T'_n(\sqrt{x_i})/2x_i. \end{aligned}$$

Podstawiając te wielkości do wzoru na mnożniki, otrzymamy:

$$M_i = \frac{8x_i^{1.5}}{T'_n(\sqrt{x_i})T_{n-2}(\sqrt{x_i})} \int_0^1 \frac{T_{n-2}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1-x)} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Podstawiając w całość $x = \cos^2 \theta$, $dx = -2\cos \theta \sin \theta d\theta$, otrzymamy:

$$M_i = \frac{8x_i^{1.5}}{T'_n(\sqrt{x_i})T_{n-2}(\sqrt{x_i})} 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(n-2)\theta d\theta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Całka kwadratu kosinusa równa się $1/4\pi$. Tak więc:

$$M_i = \frac{2\sqrt{x_i}}{T'_n(\sqrt{x_i})T_{n-2}(\sqrt{x_i})} 2\pi x_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Problemem jest obliczenie wyrażenia ułamkowego w miejscach zerowych x_i , danych wzorem (19.17). Stosując podstawienie $x_i = \cos^2 \theta_i$ oraz korzystając ze wzoru (17.6) na pochodną wielomianu T'_n , w kategoriach zmiennej θ , wzór powyższy przyjmuje postać:

$$M_i = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_i}{n \sin n\theta_i \cos(n-2)\theta_i} 2\pi x_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Można pokazać (patrz zadanie 4), że gdy $\theta_i = (2i-1)\pi/2n$, to wyrażenie ułamkowe redukuje się do $1/n$, czyli jest niezależne od i . Zatem mnożniki rzędnych wyrażą się wzorem:

$$M_i = \frac{2\pi}{n} x_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (19.18)$$

Obliczenie całki (19.16) odbywa się wg ogólnego wzoru (19.1), gdzie węzły dane są wzorem (19.17), zaś mnożniki rzędnych dane są wzorem (19.18).

Błąd metody Δ można wyznaczyć ze wzoru (4.2). Podstawiając $G_n(x) \equiv x^{-1/2}T_n(\sqrt{x})$, zaś $a_n = 2^{n-1}$, otrzymamy:

$$\Delta = \frac{g^{(2n)}(\eta)}{(2n)!2^{2n-2}} \int_0^1 \frac{T_{n-2}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1-x)} dx.$$

Całka ta była już liczona przy okazji mnożników M_i , równa się $\frac{1}{2}\pi$. Stąd:

$$\Delta = \frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}} g^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (19.19)$$

gdzie n jest nieparzyste.

PRZYKŁAD 19. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} (\cosh x - 1) dx.$$

R o z w i ą z a n i e . Całkę tę można scałkować wg wzoru (19.1), w którym węzły dane są wzorem (19.17), a mnożniki rzędnych – wzorem (19.18). Do obliczeń bierzemy 9 rzędnych (liczba rzędnych musi być nieparzysta). Po wykonaniu działań, otrzymamy $J = 0,524\,0160$. Wartość dokładna wynosi $0,524\,0160$. Widzimy, że obydwa wyniki pokrywają się do 7 cyfr dziesiętnych. Wynika to stąd, że w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ funkcja kosinus hiperboliczny jest bardzo dobrze aproksymowana wielomianem 4. stopnia, a rząd dokładności wzoru o 9 rzędnych wynosi $m = 17$.

W zastosowaniach spotyka się całki typu:

$$\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} g(x) dx.$$

Podstawienie $x = a + (b-a)t$ przekształca przedział $\langle a, b \rangle$ w przedział $\langle 0, 1 \rangle$, a funkcję wagową w funkcję wagową znanego typu:

$$\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} = \sqrt{\frac{t}{1-t}}.$$

Uwzględniając, że $dx = (b-a)dt$ oraz wprowadzając oznaczenie $g(t) = g[x(t)]$, całka powyższa przyjmie postać:

$$\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} g(x) dx = (b-a) \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} g(t) dt, \quad (19.20)$$

jak we wzorze (19.16), którą umiemy obliczać.

Zadania

1. Kiedy funkcje $T_n(t)/t$ i $T_n(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ są wielomianami?

O d p o w i e d ź. W obydwu przypadkach, gdy wielomiany Czebyszewa są nieparzyste, czyli gdy n jest nieparzyste.

2. Pokazać, że funkcja $T_n(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ jest wielomianem ortogonalnym w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, gdy waga $\theta(t) = \sqrt{t/(1-t)}$.

R o z w i ą z a n i e. Inaczej mówiąc, mamy wykazać, że:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{1}{t} T_k(\sqrt{t}) T_n(\sqrt{t}) dt = 0, \quad k \neq n.$$

Z zadania 1 wiemy, że warunek ortogonalności ma sens, gdy indeksy k i n są nieparzyste. Stosując podstawienie $\sqrt{t} = \cos \theta$, czyli $t = \cos^2 \theta$, $dt = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$, całka powyższa przybiera postać:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} \cos k\theta \cos n\theta 2 \cos \theta \sin \theta d\theta &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos k\theta \cos n\theta d\theta = \\ \int_0^{\pi/2} [\cos(n+k)\theta + \cos(n-k)\theta] d\theta &= \frac{1}{n+k} \sin(n+k)\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{n-k} \sin(n-k)\frac{1}{2}\pi = 0, \end{aligned}$$

c.b.d.o. Całkę tę już mieliśmy w zadaniu 3 na s. 85, ale w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Ponieważ indeksy k i n mogą być tylko nieparzyste, to ich suma i różnica są parzyste. A sinus parzystej wielokrotności $\frac{1}{2}\pi$ zeruje się.

3. Dla jakiej funkcji wagowej $\theta(x)$ funkcja $T_n(x)/x$ jest ortogonalna w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$?

R o z w i ą z a n i e. Funkcja ta będzie ortogonalna, gdy:

$$\int_0^1 \theta(x) \frac{1}{x^2} T_k(x) T_n(x) dx = 0, \quad k \neq n.$$

Z zadania 1 wiemy, że warunek ortogonalności ma sens, gdy indeksy k i n są nieparzyste. Stosując podstawienie $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$, całka powyższa przybiera postać:

$$\int_0^{\pi/2} \Theta(\theta) \frac{1}{\cos^2 \theta} \cos k\theta \cos n\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \Theta(\theta) \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \cos k\theta \cos n\theta d\theta.$$

Aby całka ta zerowała się, funkcja wagowa $\Theta(\theta)$ musi równać się $\cos^2 \theta / \sin \theta$. Otrzymamy bowiem całkę, o której wiemy, że się zeruje, gdy k i n są nieparzyste. Przechodząc na zmienną x , funkcja wagowa przyjmie postać:

$$\theta(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Funkcja ta nie wnosi nowej jakości, gdyż:

$$\theta(x)g(x) = \frac{x^2 g(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{g_1(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

gdzie $g_1(x)$ jest nową funkcją regularną. Mamy więc funkcję podcałkową o znanej osobliwości.

4. Pokazać, że wyrażenie ułamkowe:

$$\frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_i}{\sin n \theta_i \cos (n-2) \theta_i} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jest stałe, niezależne od i , równe 1, gdy $\theta_i = (2i-1)\pi/2n$.

R o z w i ą z a n i e. W wyrażeniu powyższym możemy zwinąć licznik:

$$\frac{\sin 2\theta_i}{\sin n\theta_i \cos (n-2)\theta_i}.$$

Kąt $n\theta_i = (2i-1)\pi/2$. Sinus nieparzystej wielokrotności $\frac{1}{2}\pi$ równa się ∓ 1 . Z kolei kąt:

$$(2n-2)\theta_i = 2n\theta_i - 2\theta_i = (2i-1)\pi/2 - 2\theta_i.$$

Kosinus tego kąta równa się $\mp \sin 2\theta_i$ (zastosowaliśmy tu wzór redukcyjny). Zatem mianownik równa się $\sin 2\theta_i$, tyle co licznik. Tak więc wyrażenie ułamkowe równa się 1, c.b.d.o.

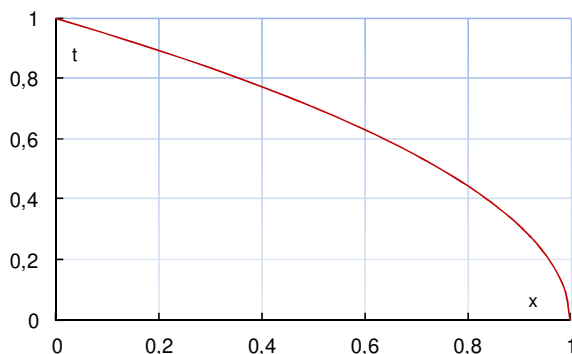
d) Wzory z wagą $(1-x)^{1/2}$

Wzory te dotyczą całkowania całek typu:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} g(x) dx. \quad (19.21)$$

Funkcja podcałkowa ma asymptotę pionową w punkcie $x = 1$ (rys. 19). Jest to więc funkcja osobiwa, która nie nadaje się do numerycznego całkowania zwykłymi metodami. Funkcją wagową, zawierającą osobiwość, jest $\theta(x) = (1-x)^{1/2}$. Wielomianami ortogonalnymi w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ z powyższą funkcją wagową są wielomiany:

$$G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} P_n(\sqrt{1-x}) = \frac{P_n(t)}{t} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystych,}$$



Rys. 19. Funkcja wagowa $\theta(x) = (1-x)^{1/2}$

gdzie $t = (1-x)^{1/2}$. Dowód podany jest w zadaniu 1 na s. 110. Węzły wyznaczają pierwiastki wielomianu ortogonalnego $G_n(x) = 0$. Znajdują się więc w punktach $t_i \equiv (1-x_i)^{1/2}$, które są pierwiastkami wielomianu nieparzystego $P_n(t)$.

Mnożniki M_i można obliczyć ze wzoru (4.5), gdyż wielomian ortogonalny jest znany: $G_n(x) \equiv P_n(t)/t$, gdzie $t = (1-x)^{1/2}$. We wzorze (4.5) $n-1$ zastępujemy przez $n-2$, gdyż pod uwagę bierzemy tylko wielomiany nieparzyste. Stąd, uwzględniając (16.2):

$$\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)}. \quad (19.22)$$

Tak więc wzór (4.5) przybiera postać:

$$M_i = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \frac{1}{G'_n(x_i) G_{n-2}(x_i)} \int_0^1 \sqrt{1-x} G_{n-2}^2(x) dx,$$

Uwzględniając, że:

$$G_{n-2}(x) \equiv P_{n-2}(t)/t,$$

$$G'_n(x) = \left(\frac{P_n}{t} \right)' = \frac{tP'_n(t) - P_n(t)}{t^2} t'.$$

Podstawiając za $x = x_i$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} G_{n-2}(x_i) &\equiv P_{n-2}(t_i)/t_i, \\ G'_n(x_i) &= t_i^{-1} P'_n(t_i) t'_i, \end{aligned}$$

gdzie $t'_i = -1/2t_i$. Aby $G'_n(x_i)$ i $P'_n(t_i)$ miały ten sam znak, w miejsce t'_i musimy wziąć $|t'_i|$. Podstawiając te wielkości do wzoru na mnożniki, otrzymamy:

$$M_i = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \frac{2t_i^3}{P'_n(t_i)P_{n-2}(t_i)} \int_0^1 \frac{P_{n-2}^2(t)}{t} dx.$$

Podstawiając w całce $x = 1 - t^2$, $dx = -2tdt$, otrzymamy:

$$M_i = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \frac{2t_i^3}{P'_n(t_i)P_{n-2}(t_i)} 2 \int_0^1 P_{n-2}^2(t) dt.$$

Wykorzystując symetrię funkcji podcałkowej, otrzymamy:

$$M_i = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \frac{2t_i^3}{P'_n(t_i)P_{n-2}(t_i)} \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(t) dt.$$

Ze wzoru (26.13) wynika, że całka w powyższym wzorze równa się $2/(2n-3)$. Tak więc:

$$M_i = \frac{(2n-1)}{n(n-1)} \frac{4t_i^3}{P'_n(t_i)P_{n-2}(t_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Problemem jest obliczenie wyrażenia ułamkowego w miejscach zerowych wielomianu $P_n(t)$. Musimy odwołać się do wzorów rekurencyjnych wielomianów Legendre'a. Ze wzoru (26.4) wynika, że:

$$P_{n-2}(t_i) = \frac{(2n-1)}{(n-1)} t_i P_{n-1}(t_i).$$

Podstawiając ten wzór do wzoru na mnożniki, otrzymamy:

$$M_i = \frac{1}{n} \frac{4t_i^2}{P'_n(t_i)P_{n-1}(t_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Z kolei ze wzoru (26.9) wynika, że:

$$nP_{n-1}(t_i) = (1 - t_i^2)P'_n(t_i).$$

Podstawiając ten wzór do wzoru na mnożniki, otrzymamy ostatecznie:

$$M_i = \frac{4t_i^2}{(1-t_i^2)P_n'^2(t_i)} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (19.23)$$

Jeśli porównamy ten wzór ze wzorem (16.3), w którym $H_i = \frac{1}{2}M_i$, to widzimy, że powyższe mnożniki są $2t_i^2$ razy większe, niż mnożniki H_i dane wzorem (16.3) dla nieparzystych n . Obliczenie całki (19.21) odbywa się wg ogólnego wzoru (19.1).

Błąd metody Δ można wyznaczyć ze wzoru (4.2). Podstawiając $G_n(x) \equiv P_n(t)/t$ oraz a_n , dany wzorem (16.2), otrzymamy:

$$\Delta = \frac{2^{2n}(n!)^4}{[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\eta) \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{t} dx \quad \eta \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ostatnia całka była już liczona przy okazji mnożników M_i , równa się $2/(2n+1)$. Stąd:

$$\Delta = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\eta) \quad \eta \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (19.24)$$

gdzie n jest nieparzyste.

PRZYKŁAD 20. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx.$$

R o z w i ą z a n i e . Stosujemy podstawienie $\sqrt{x} = t$. Otrzymamy całkę:

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x} 2x dx,$$

którą można scałkować ściśle wg wzoru (19.21). Funkcją regularną $g(x) = 2x$ jest bowiem funkcja liniowa. W tym przypadku wystarczy wziąć trzy rzędne, położone w punktach $x_i \equiv 1 - t_i^2$, gdzie wg tabeli 4 odcięte $t_{1,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{0,6}$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Mnożniki rzędnych M_i są $2t_i^2$ razy większe, od tych podanych w tabeli 4 dla $n = 3$, czyli wynoszą: $M_{1,3} = {}^5/9 t_{1,3}^2$, $M_2 = {}^8/9 t_2^2$. Po wykonaniu działań otrzymamy $J = {}^8/15$. Taki sam wynik otrzymamy z całkowania analitycznego.

W zastosowaniach spotyka się całki typu:

$$\int_a^b \sqrt{b-x} g(x) dx.$$

Podstawienie $x = a + (b-a)t$ przekształca przedział $\langle a, b \rangle$ w przedział $\langle 0, 1 \rangle$, a funkcję wagową w funkcję wagową znanego typu:

$$\sqrt{b-x} = \sqrt{(b-a)(1-t)}.$$

Uwzględniając, że $dx = (b-a)dt$ oraz wprowadzając oznaczenie $g(t) = g[x(t)]$, całka powyższa przyjmie postać:

$$\int_a^b \sqrt{b-x} g(x) dx = (b-a)^{3/2} \int_0^1 \sqrt{1-t} g(t) dt, \quad (19.25)$$

jak we wzorze (19.21), którą umiemy obliczać.

Zadania

1. Pokazać, że funkcja $P_n[\sqrt{(1-t)}]/\sqrt{(1-t)}$ jest wielomianem ortogonalnym w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, gdy wagą jest $\theta(t) = \sqrt{(1-t)}$, gdzie P_n jest wielomianem Legendre'a.
 R o z w i ą z a n i e. Zauważmy wpierrw, że funkcje $P_n[\sqrt{(1-t)}]/\sqrt{(1-t)}$ są wielomianami jedynie w przypadku nieparzystych n . Mamy wykazać, że:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sqrt{1-t} \frac{1}{1-t} P_k(\sqrt{1-t}) P_n(\sqrt{1-t}) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} P_k(\sqrt{1-t}) P_n(\sqrt{1-t}) dt = 0, \quad k \neq n. \end{aligned}$$

Stosując podstawiając $1-t = x^2$, $-dt = 2xdx$, całka powyższa przybiera postać:

$$2 \int_0^1 \frac{1}{x} P_k(x) P_n(x) x dx = \int_{-1}^1 P_k(x) P_n(x) dx = 0,$$

jeśli $k \neq n$ i obydwa indeksy są nieparzyste. Wykorzystaliśmy tu własność, że iloczyn dwóch funkcji nieparzystych jest parzysty.

e) Wzory z wagą $(1-x)^{-1/2}$

Wzory te dotyczą całkowania całek typu:

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x}} dx. \quad (19.26)$$

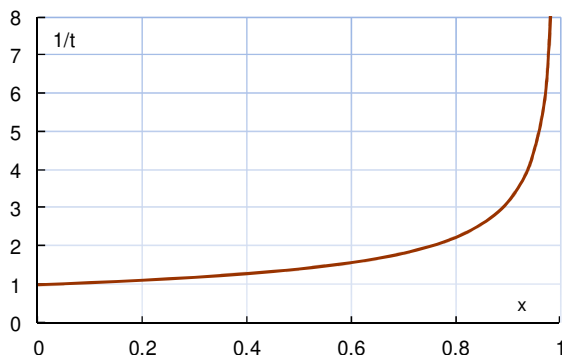
Funkcja podcałkowa ma asymptotę pionową w punkcie $x = 1$ (Rys. 20). Jest to więc funkcja osobliwa, która nie nadaje się do numerycznego całkowania zwykłymi metodami. Funkcją wagową jest $\theta(x) = 1/(1-x)^{1/2}$. Wielomianami ortogonalnymi w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ z powyższą funkcją wagową są wielomiany:

$$G_n(x) = P_n(\sqrt{1-x}) = P_n(t) \quad \text{dla } n \text{ parzystych,}$$

gdzie $t = (1-x)^{1/2}$. Dowód podany jest w zadaniu 1 na s. 113. Węzły wyznaczają pierwiastki wielomianu ortogonalnego $G_n(x) = 0$. Znajdują się więc w punktach $t_i \equiv (1-x_i)^{1/2}$, które są pierwiastkami wielomianu parzystego $P_n(t)$.

Mnożniki M_i można obliczyć ze wzoru (4.5), gdyż wielomian ortogonalny jest znany, jest nim $G_n(x) \equiv P_n(t)$, gdzie $t = (1-x)^{1/2}$. We wzorze (4.5) $n-1$ zastępujemy przez $n-2$, gdyż pod uwagę bierzemy tylko wielomiany parzyste. Stąd, uwzględniając (16.2), wzór (4.5) przybiera postać:

$$M_i = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \frac{1}{G'_n(x_i)G_{n-2}(x_i)} \int_0^1 \frac{G_{n-2}^2(x)}{\sqrt{1-x}} dx,$$



Rys. 20. Funkcja wagowa $\theta(x) = 1/(1-x)^{1/2}$

Uwzględniając, że:

$$\begin{aligned} G_{n-2}(x) &\equiv P_{n-2}(t), \\ G'_n(x) &\equiv P'_n(t) \cdot t'. \end{aligned}$$

Podstawiając za $x = x_i$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} G_{n-2}(x_i) &\equiv P_{n-2}(t_i), \\ G'_n(x_i) &= P'_n(t_i) \cdot |t'_i|, \end{aligned}$$

gdzie $t'_i = -1/2t_i$. Aby $G'_n(x_i)$ i $P'_n(t_i)$ miały ten sam znak, w miejsce t'_i musimy wziąć $|t'_i|$. Podstawiając te wielkości do wzoru na mnożniki, otrzymamy:

$$M_i = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \frac{2t_i}{P'_n(t_i)P_{n-2}(t_i)} \int_0^1 \frac{P_{n-2}^2(t)}{t} dx.$$

Podstawiając $x = 1-t^2$, $dx = -2tdt$, otrzymamy całkę równą $2/(2n-3)$. Tak więc:

$$M_i = \frac{(2n-1)}{n(n-1)} \frac{2t_i}{P'_n(t_i)P_{n-2}(t_i)} \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Problemem jest obliczenie wyrażenia ułamkowego w miejscach zerowych wielomianu $P_n(t)$. Wykorzystując te same związki rekurencyjne co poprzednio, otrzymamy:

$$M_i = \frac{2}{(1-t_i^2)P_n'^2(t_i)} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (19.27)$$

Porównując go ze wzorem (16.3), widzimy, że powyższe mnożniki są 2 razy większe, niż mnożniki H_i dane wzorem (16.3) dla parzystych n . Obliczenie całki (19.26) odbywa się wg ogólnego wzoru (19.1).

Błąd metody Δ można wyznaczyć ze wzoru (4.2). Podstawiając $G_n(x) \equiv P_n(t)$ oraz a_n , dany wzorem (16.2), otrzymamy wzór (19.24) z tym, że n jest parzyste.

PRZYKŁAD 21. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}.$$

R o z w i ą z a n i e. Stosujemy podstawienie $\sqrt{x} = t$. Otrzymamy całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1-t}} dt,$$

którą można scałkować ściśle wg wzoru (19.26). Funkcją regularną $g(t) = 2t$ jest bowiem funkcja liniowa. W tym przypadku wystarczy wziąć dwie rzędne, położone w punktach $t_{1,2} = 1 - x_{1,2}^2$, gdzie wg tabeli 4 odcięte $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mnożniki rzędnych M_i są dwa razy większe, od tych podanych w tabeli 4 dla $n = 2$, czyli wynoszą 1. Całka równa się więc $J = g_1 + g_2$. Po wykonaniu działań otrzymamy $J = 2\frac{2}{3}$. Taki sam wynik otrzymamy z całkowania analitycznego.

W zastosowaniach spotyka się całki typu:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{\sqrt{b-x}} dx.$$

Podstawienie $x = a + (b-a)t$ przekształca przedział $\langle a, b \rangle$ w przedział $\langle 0, 1 \rangle$, a funkcję wagową w funkcję wagową znanego typu:

$$\sqrt{b-x} = \sqrt{(b-a)(1-t)}.$$

Uwzględniając, że $dx = (b-a)dt$ oraz wprowadzając oznaczenie $g(t) = g[x(t)]$, całka powyższa przyjmie postać:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{\sqrt{b-x}} dx = (b-a)^{1/2} \int_0^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t}} dt, \quad (19.28)$$

jak we wzorze (19.26), którą umiemy obliczać.

W zastosowaniach spotyka się też całki typu:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x} g(x) dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1+x}} dx.$$

W obydwu przypadkach funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie $x = -1$. Są to więc całki osobliwe, która nie nadają się do numerycznego całkowania zwykłymi metodami. Funkcją wagową jest $\theta(x) = 1/(1+x)^{1/2}$. Dla tej funkcji wagowej nie ma znanych wielomianów ortogonalnych w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. Trudność tę możemy obejść, stosując podstawienie $x = -t$. Otrzymamy:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x} g(-x) dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{g(-x)}{\sqrt{1-x}} dx$$

(po wykonaniu przekształceń t możemy zastąpić przez x). Osobliwość występuje teraz w punkcie $x = 1$. Całkowanie możemy rozbić na dwa podprzedziały $\langle -1, 0 \rangle$ i $\langle 0, 1 \rangle$. W przedziale $\langle -1, 0 \rangle$ funkcja podcałkowa jest regularna, zaś przedział $\langle 0, 1 \rangle$ obejmuje osobliwość. Całkowanie możemy więc wykonać, jak we wzorze (19.21) czy (19.26).

Zadania

1. Pokazać, że funkcja $P_n[\sqrt{1-t}]$ jest wielomianem ortogonalnym w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, gdy wagą jest $\theta(t) = (1-t)^{-1/2}$, gdzie P_n jest wielomianem Legendre'a.
R o z w i ą z a n i e. Zauważmy wpierrw, że funkcje $P_n[\sqrt{1-t}]$ są wielomianami jedynie w przypadku n parzystych. Mamy wykazać, że:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} P_k(\sqrt{1-t}) P_n(\sqrt{1-t}) dt = 0 \qquad k \neq n.$$

Całkę tę mieliśmy już w zadaniu 1 na s. 110.

2. Obliczyć całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}.$$

R o z w i ą z a n i e. Stosujemy podstawienie $\sqrt{x} = t$. Otrzymamy całkę:

$$J = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1-t}} dt,$$

którą można scałkować ściśle wg wzoru (19.26). Funkcją regularną $g(t) = 2t$ jest bowiem funkcja liniowa. W tym przypadku wystarczy wziąć dwie rzędne, położone w punktach $t_{1,2} = 1 - x_{1,2}^2$, gdzie wg tabeli 4 odcięte $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}/\sqrt{3}$. Mnożniki rzędnych M_i są dwa razy większe, od tych podanych w tabeli 4 dla $n = 2$, czyli wynoszą 1. Całka równa się więc $J = g_1 + g_2$. Po wykonaniu działań otrzymamy $J = 2\frac{2}{3}$. Taki sam wynik otrzymamy z całkowania analitycznego.

§ 20. Całkowanie w przedziale nieskończonym

Poprzednio omawialiśmy całkowanie w przedziale skończonym funkcji regularnych i osobliwych. Funkcją wagową $\theta(x)$ w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$ jest *funkcja tłumiąca* e^{-x} , a w przedziale $\langle -\infty, \infty \rangle$ funkcja związana z gęstością rozkładu normalnego $e^{-x^2/2}$ lub e^{-x^2} .

a) Wzory Laguerre'a

Wzory te, zwane też wzorami Gaussa-Laguerre'a, dotyczą obliczania całek typu:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} g(x) dx = \sum_{i=1}^n M_i g(x_i) + \Delta. \quad (20.1)$$

Węzły x_i są miejscami zerowymi wielomianów ortogonalnych Laguerre'a $L_n(x)$, dyskuutowanymi w § 27. Mnożniki wyprowadza się ze wzoru (4.5). Zatem:

$$M_i = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{L'_n(x_i) L_{n-1}(x_i)} \int_0^{\infty} e^{-x} L_{n-1}^2(x) dx.$$

Ze wzoru (27.4) wynika, że iloraz $a_n/a_{n-1} = -1/n$, zaś całka w powyższym wzorze równa się 1, niezależnie od n , co określa wzór (27.10). Tak więc:

$$M_i = \frac{-1}{n L'_n(x_i) L_{n-1}(x_i)}.$$

We wzorze chcemy się pozbyć pochodnej $L'_n(x_i)$. Korzystając ze wzoru rekurencyjnego (27.6), otrzymamy:

$$L'_n = -n L_{n-1}/x_i,$$

gdyż $L_n(x_i) \equiv 0$. Podstawiając do wzoru, otrzymamy:

$$M_i = \frac{x_i}{n^2 L_{n-1}^2(x_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20.2)$$

Mnożniki M_i są więc prostą funkcją x_i . Korzystając ze wzoru rekurencyjnego (27.2), otrzymamy wzór na mnożniki, tożsamy ze wzorem (20.2):

$$M_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 L_{n+1}^2(x_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20.3)$$

Stosując wzór (4.2), otrzymamy wzór na błąd:

$$\Delta = \frac{(n!)^2}{(2n)!} g^{(2n)}(\eta) \quad \eta \in \langle 0, \infty \rangle. \quad (20.4)$$

Rząd dokładności wzorów $m = 2n - 1$.

Węzły x_i , mnożniki M_i , rząd dokładności m oraz stała $c = (n!)^2/(2n)!$ we wzorze na

błąd Δ podane są w tabeli 6 w zależności od liczby rzędnych $n \leq 8$. Dane dla większej liczby rzędnych można znaleźć w [1]. UWAGA – w tablicach tych wzór (20.3) podany jest błędnie.

Tab. 6. Położenie węzłów x_i , mnożniki M_i , rząd dokładności m oraz stała c we wzorze na błąd Δ wzorów Laguerre'a

n	m	x_i	M_i	$M_i e^{x_i}$	stała c
2	3	$2 - \sqrt{2} \approx 0,585\ 79$	$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}} \approx 0,853\ 55$	1,533 326 033 12	1/6
		$2 + \sqrt{2} \approx 3,414\ 21$	$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{8}} \approx 0,146\ 45$	4,450 957 335 05	
3	5	0,415 774 556 783	0,711 093 009 929	1,077 692 859 27	1/20
		2,294 280 360 279	0,278 517 733 569	2,762 142 961 90	
		6,289 945 082 937	(-1)0,103 892 565 016	5,601 094 625 43	
4	7	0,322 547 689 619	0,603 154 104 342	0,832 739 123 838	1/70
		1,745 761 101 158	0,357 418 692 438	2,048 102 438 45	
		4,536 620 296 921	(-1)0,388 879 085 150	3,631 146 305 82	
		9,395 070 912 301	(-3)0,539 294 705 561	6,487 145 084 41	
5	9	0,263 560 319 718	0,521 755 610 583	0,679 094 042 208	1/252
		1,413 403 059 107	0,398 666 811 083	1,638 487 873 60	
		3,596 425 771 041	(-1)0,759 424 496 817	2,769 443 242 37	
		7,085 810 005 859	(-2)0,361 175 867 992	4,315 656 900 92	
		12,640 800 844 276	(-4)0,233 699 723 858	7,219 186 354 35	
6	11	0,222 846 604 179	0,458964673950	0,573 535 507 423	1/924
		1,188 932 101 673	0,417000830772	1,369 252 590 71	
		2,992 736 326 059	0,113373382074	2,260 684 593 38	
		5,775 143 569 105	(-1)0,103991974531	3,350 524 582 36	
		9,837 467 418 383	(-3)0,261017202815	4,886 826 800 21	
		15,982 873 980 602	(-6)0,898547906430	7,849 015 945 60	
7	13	0,193043676560	0,409318951701	0,496 477 597 540	1/3 432
		1,026664895339	0,421831277862	1,177 643 060 86	
		2,567876744951	0,147126348658	1,918 249 781 66	
		4,900353084526	(-1)0,206335144687	2,771 848 636 23	
		8,182153444563	(-2)0,107401014328	3,841 249 122 49	
		12,734180291798	(-4)0,158654643486	5,380 678 207 92	
		19,395727862263	(-7)0,317031547900	8,405 432 486 83	
8	15	0,170279632305	0,369 188 589 342	0,437723410493	1/12 870
		0,903701776799	0,418 786 780 814	1,03386934767	
		2,251086629866	0,175 794 986 637	1,66970976566	
		4,266700170288	(-1)0,333 434 922 612	2,37692470176	
		7,045905402393	(-2)0,279 453 623 523	3,20854091335	
		10,758516010181	(-4)0,907 650 877 336	4,26857551083	
		15,740678641278	(-6)0,848 574 671 627	5,81808336867	
		22,863131736889	(-8)0,104 800 117 487	8,90622621529	

Jak widać, stała $c = (n!)^2/(2n)!$ we wzorze na błąd Δ jest dość duża, przy czym wolno maleje ze wzrostem n . Niekorzystnie wpływa to na dokładność tych wzorów, gdy funkcja regularna $g(x)$ nie jest wielomianem. W takim przypadku do obliczeń całek należy brać większą liczbę rzędnych.

Układ (3.4) dla wzorów Gaussa-Laguerre'a przybiera postać:

$$\sum_{i=1}^n M_i x_i^k = k! \quad k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (20.5)$$

gdzie k oznacza rząd pochodnej funkcji $g(x)$, przy której stoją porównane wyrażenia we wzorach (3.1) i (3.2). Lewa strona przedstawia momenty mnożników J_k względem początku układu, które równają się $k!$. Moment zerowy i pierwszego rzędu równają się 1, czyli suma mnożników $\sum M_i = 1$ i moment statyczny mnożników $\sum M_i x_i = 1$, czyli średni mnożnik $\langle M_i \rangle = 1$. Inaczej mówiąc, „masa” mnożników i ich „środek ciężkości” są równe 1, bez względu na ich liczbę. Ponieważ ze wzrostem liczby rzędnych n wzrasta rozciągłość węzłów, to mnożniki dla węzłów odległych od początku układu muszą szybko maleć, co potwierdza tabela 6. Wynika z niej, że iloczyn $M_i e^{x_i}$ ma znacznie mniejszą zmienność.

Zadanie

1. Wyprowadzić wzór Laguerre'a dla $n = 3$ rzędnych w sposób analityczny.

R o z w i ą z a n i e. W przykładzie na s. 20 wyprowadziliśmy wzór Gaussa-Laguerre'a dla 2 rzędnych, uzyskując wyrażenia algebraiczne. W przypadku trzech i więcej rzędnych nie da się uzyskać wyrażeń algebraicznych. Tym niemniej w przypadku trzech rzędnych możemy uzyskać wyrażenia analityczne.

Wiemy, że węzły znajdują się w miejscach zerowych wielomianu Laguerre'a trzeciego stopnia: $L_3 = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$. Położenie węzłów określają pierwiastki równania trzeciego stopnia: $-x^3 + 9x^2 - 18x + 6 = 0$. Mnożąc je przez -1 , otrzymamy:

$$x^3 - 9x^2 + 18x - 6 = 0.$$

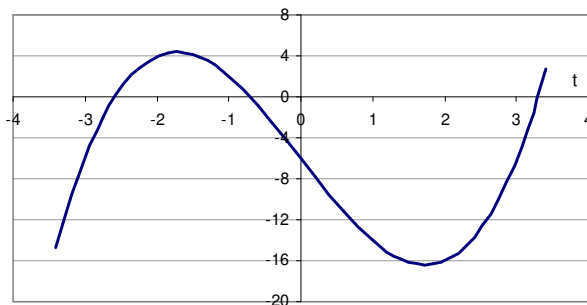
Stosując podstawienie $x = t + 3$, równanie to możemy sprowadzić do postaci kanonicznej $t^3 + pt + q = 0$, w którym nie ma wyrazu kwadratowego:

$$t^3 - 9t - 6 = 0.$$

Wielomian w postaci kanonicznej pokazany jest na rys. 21. Punkt przegięcia wielomianu wypada na osi rzędnych w punkcie $y = q = -6$; jest to jednocześnie punkt symetrii osiowej wielomianu, co widać na rysunku. Ekstrema wielomianu wypadają w punktach $t = \pm(-\frac{1}{3}p)^{1/2} = \pm 1,732$. Pierwiastki (miejsca zerowe) równania dane są wzorem:

$$t_i = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) - i \frac{2\pi}{3} \right] \quad i = 0, 1, 2,$$

co jednocześnie określa położenie trzech węzłów $x_i = t_i + 3$.



Rys. 21

Mnożniki określimy ze wzoru (20.2), gdzie $L_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$. Wyniki zebrane są w tabeli poniżej. Widzimy, że są tożsame z tabelą 6 dla $n = 3$. Położenie węzłów t_i zgodne jest też z rys. 21.

i	t_i	x_i	M_i
0	3,289945083	6,289 945 082 937	0,010 389 256 5016
1	-0,70571964	2,294 280 360 279	0,278 517 733 569
2	-2,584225443	0,415 774 556 783	0,711 093 009 929

b) Wzory Hermite'a

Wzory te, zwane też wzorami Gaussa-Hermite'a, dotyczą obliczania całek typu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} g(x) dx = \sum_{i=1}^n M_i g(x_i) + \Delta. \quad (20.6)$$

Węzły x_i są pierwiastkami wielomianów Hermite'a $H_n(x)$, diskutowanymi w § 28. Węzły są symetryczne w przedziale całkowania.

Mnożniki wprowadza się ze wzoru (4.5). Zatem:

$$M_i = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{H'_n(x_i) H_{n-1}(x_i)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_{n-1}^2(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ze wzoru (28.3) wynika, że współczynnik wiodący $a_n = 1$. Stąd iloraz $a_n/a_{n-1} = 1$, zaś całka w powyższym wzorze równa się $(2\pi)^{1/2}(n-1)!$, co wynika ze wzoru (28.10). Tak więc:

$$M_i = \frac{(n-1)!}{H'_n(x_i) H_{n-1}(x_i)} \sqrt{2\pi}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

We wzorze chcemy pozbyć się pochodnej $H'_n(x_i)$. Pochodna ta równa się nH_{n-1} , co wynika ze wzoru rekurencyjnego (28.5). Podstawiając ją do wzoru na mnożniki, otrzymamy prosty wzór:

$$M_i = \frac{(n-1)!}{nH_{n-1}^2(x_i)} \sqrt{2\pi} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20.7)$$

Wzór jest prosty, gdyż dla zadanej liczby rzędnych mnożniki $M_i = \text{stała}/H_{n-1}^2(x_i)$ są wyłącznie znaną funkcją położenia węzłów.

Stosując wzór (4.2), otrzymamy wzór na błąd:

$$\Delta = \frac{n!}{(2n)!} \sqrt{2\pi} g^{(2n)}(\eta) \quad \eta \in \langle -\infty, \infty \rangle. \quad (20.8)$$

Rząd dokładności wzorów $m = 2n - 1$.

Współczynnik liczbowy we wzorze na błąd (20.8), w odróżnieniu od wzorów Laguerre'a, szybko maleje ze wzrostem n , co jest korzystne dla dokładności obliczeń. Błąd ten jest dużo mniejszy od błędu (20.4) dla wzorów Laguerre'a. Stosunek większego błędu do mniejszego wynosi $n!/\sqrt{(2\pi)}$. Bardzo korzystne jest stosowanie dużej liczby rzędnych do obliczeń całki. Warto zaznaczyć, że w przypadku całek z wagą nie można stosować całkowania złożonego.

W zastosowaniach bywa stosowany drugi rodzaj wzorów Hermite'a, gdzie funkcją wagową jest e^{-x^2} , a nie $e^{-x^2/2}$. Mianowicie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x) dx = \sum_{i=1}^n M_i g(x_i) + \Delta. \quad (20.9)$$

W tym przypadku węzły x_i są pierwiastkami zmodyfikowanych wielomianów Hermite'a, które dla odróżnienia będziemy oznaczali przez $h_n(x)$. Istnieje prosty związek pomiędzy obydwooma typami wielomianów. Mianowicie:

$$h_n(x) = 2^{n/2} H_n(x/\sqrt{2}), \quad H_n(x) = 2^{-n/2} h_n(x/\sqrt{2}). \quad (20.10)$$

Ze związków tych wynika, że znając położenie węzłów dla jednej funkcji wagowej, to węzły dla drugiej znajdziemy przez proste przeskalowanie w proporcji do $\sqrt{2}$. Dla funkcji wagowej $e^{-x^2/2}$ odległości między węzłami są $\sqrt{2}$ raza *większe*, niż dla funkcji wagowej e^{-x^2} . Podobna zależność zachodzi dla mnożników M_i , co wykażemy niżej.

Zmodyfikowane wielomiany $h_n(x)$ spełniają związki rekurencyjne:

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= 2xh_n(x) - 2nh_{n-1}(x), \\ h'_n(x) &= 2nh_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Mnożniki wyprowadza się ze wzoru (4.5). Zatem:

$$M_i = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{h'_n(x_i)h_{n-1}(x_i)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} h_{n-1}^2(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Współczynnik wiodący $a_n = 2^n$. Stąd iloraz $a_n/a_{n-1} = 2$, zaś całka w powyższym wzorze

równa się $(\pi)^{1/2}2^{n-1}(n-1)!$. Tak więc:

$$M_i = \frac{2^n(n-1)!}{h'_n(x_i)h_{n-1}(x_i)}\sqrt{\pi}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

We wzorze chcemy pozbyć się pochodnej $h'_n(x_i)$. Pochodna ta równa się $2nh_{n-1}$, co wynika ze wzoru rekurencyjnego. Podstawiając ją do wzoru na mnożniki, otrzymamy:

$$M_i = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{nh_{n-1}^2(x_i)}\sqrt{\pi} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20.11)$$

Dzieląc wzór (20.7) przez wzór (20.11), otrzymamy $\sqrt{2}$. Inaczej mówiąc, mnożniki M_i dla funkcji wagowej $e^{-x^2/2}$ są $\sqrt{2}$ raza większe niż mnożniki M_i dla funkcji wagowej e^{-x^2} .

Stosując wzór (4.2), otrzymamy wzór na błąd:

$$\Delta = c\sqrt{\pi}g^{(2n)}(\eta) \quad \eta \in \langle -\infty, \infty \rangle, \quad (20.12)$$

gdzie stała $c = n!/2^n(2n)!$. Rząd dokładności wzorów $m = 2n - 1$.

Układ (3.4) dla wzorów Gaussa-Hermite'a z funkcją wagową e^{-x^2} przybiera postać:

$$\sum_{i=1}^n M_i x_i^k = \frac{(k-1)!!}{2^{k/2}}\sqrt{\pi} \quad k = 2, 4, \dots, m, \quad (20.13)$$

gdzie k oznacza rząd pochodnej funkcji $g(x)$, przy której stoją porównane wyrażenia we wzorach (3.1) i (3.2). Lewa strona przedstawia momenty mnożników J_k względem początku układu. Ponieważ węzły, jak i mnożniki mają przebieg symetryczny, momenty nieparzystego rzędu są równe 0. Moment zerowy $J_0 = 2\sqrt{(1/4)\pi} = \sqrt{\pi}$, a moment drugiego rzędu $J_2 = \sqrt{(1/4)\pi}$ jest o połowę mniejszy. Tak więc suma mnożników $\sum M_i = \sqrt{\pi}$, a moment bezwładności mnożników $\sum M_i x_i^2 = \sqrt{(1/4)\pi}$, bez względu na liczbę rzędnych. Ponieważ ze wzrostem liczby rzędnych n wzrasta rozciągłość węzłów, to mnożniki dla węzłów odległych od początku układu muszą szybko maleć, co potwierdza tabela 7. Wynika z niej, że iloczyn $M_i e^{x_i^2}$ ma znacznie mniejszą zmienność.

Węzły x_i , mnożniki M_i , rząd dokładności m oraz stała $c = n!/2^n(2n)!$ we wzorze (20.12) na błąd Δ podane są w tabeli 7 w zależności od liczby rzędnych $n \leq 8$ dla funkcji wagowej e^{-x^2} . Dane dla większej liczby rzędnych można znaleźć w [1]. Węzły x_i i mnożniki M_i dla funkcji wagowej $e^{-x^2/2}$ są $\sqrt{2}$ razy większe od podanych w tabeli 7. Węzły x_i są liczbami algebraicznymi, a mnożniki M_i , ze względu na $\sqrt{\pi}$, są liczbami przestępnymi. Ze wzoru (20.11) i (20.13) wynika, że mnożniki M_i są proporcjonalne do $\sqrt{\pi}$. Można więc byłoby wprowadzić znormalizowane mnożniki w_i , odniesione do $\sqrt{\pi}$, tj. $w_i \equiv M_i/\sqrt{\pi}$. Wzór (20.9) na całkowanie funkcji z wagą przyjąłby wówczas postać:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x) dx = \sqrt{\pi} \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) + \Delta. \quad (20.14)$$

Tab. 7. Położenie węzłów x_i , mnożniki M_i , rząd dokładności m oraz stała c we wzorze na błąd Δ wzorów Hermite'a

n	m	$\pm x_i$	M_i	$M_i e^{x_i^2}$	stała c
2	3	$1/\sqrt{2} \approx 0,70711$	$\sqrt{1/4}\pi \approx 0,88623$	1,461 141 182 661	1/48
3	5	$\sqrt{1,5} \approx 1,22474$ 0	$(1/6)\sqrt{\pi} \approx 0,29541$ $(2/3)\sqrt{\pi} \approx 1,18164$	1,323 931 175 214 1,181 635 900 604	1/960
4	7	$\sqrt{(1,5+\sqrt{1,5})} \approx 1,65061$ $\sqrt{(1,5-\sqrt{1,5})} \approx 0,52465$	$\sqrt{(\pi)/4}/(3+\sqrt{6}) \approx 0,081313$ $\sqrt{(\pi)/4}/(3-\sqrt{6}) \approx 0,80491$	1,240 225 817 696 1,059 964 482 895	1/26880
5	9	$\sqrt{(2,5+\sqrt{2,5})} \approx 2,02018$ $\sqrt{(2,5-\sqrt{2,5})} \approx 0,95857$ 0	$^{3/40}\sqrt{(\pi)}/(1+\sqrt{2,5}) \approx 0,019953$ $^{3/40}\sqrt{(\pi)}/(1-\sqrt{2,5}) \approx 0,39362$ $^{8/15}\sqrt{\pi} \approx 0,94531$	1,181 488 625 536 0,986 580 996 751 0,945 308 720 483	1/967680
6	11	2,350 604 973 674 1,335 849 074 014 0,436 077 411 928	$(-2)0,453 000 990 551$ 0,157 067 320 323 0,724 629 595 224	1,136 908 332 674 0,935 580 557 631 0,876 401 334 436	$2,349 \cdot 10^{-8}$
7	13	2,651 961 356 835 1,673 551 628 767 0,816 287 882 859 0	$(-3)0,971 781 245 100$ $(-1)0,545 155 828 191$ 0,425 607 252 610 0,810 264 617 557	1,101 330 729 610 0,897 184 600 225 0,828 687 303 284 0,810 264 617 557	$4,517 \cdot 10^{-10}$
8	15	2,930 637 420 257 1,981 656 756 696 1,157 193 712 447 0,381 186 990 207	$(-3)0,199 604 072 211$ $(-1)0,170 779 830 074$ 0,207 802 325 815 0,661 470 125 558	1,071 930 144 248 0,866 752 606 563 0,792 890 048 386 0,764 544 128 652	$7,528 \cdot 10^{-12}$
9	17	3,190 993 201 782 2,266 580 584 532 1,468 553 289 217 0,723 551 018 753 0	$(-4)0,396 069 772 633$ $(-2)0,494 362 427 554$ $(-1)0,884 745 273 944$ 0,432 651 559 003 0,720 235 215 606	1,047 003 580 977 0,841 752 701 479 0,764 608 125 095 0,730 302 453 275 0,720 235 215 606	$1,107 \cdot 10^{-13}$
10	19	3,436 159 118 838 2,532 731 674 233 1,756 683 649 300 1,036 610 829 790 0,342 901 327 224	$(-5)0,764 043 285 523$ $(-2)0,134 364 574 678$ $(-1)0,338 743 944 555$ 0,240 138 611 082 0,610 862 633 735	1,025 451 691 366 0,820 666 126 405 0,741 441 931 944 0,703 296 323 105 0,687 081 853 951	$1,457 \cdot 10^{-15}$
12	23	3,889 724 897 870 3,020 637 025 121 2,279 507 080 501 1,597 682 635 153 0,947 788 391 240 0,314 240 376 254	$(-6)0,265 855 168 436$ $(-4)0,857 368 704 359$ $(-2)0,390 539 058 463$ $(-1)0,516 079 856 159$ 0,260 492 310 264 0,570 135 236 263	0,989 699 047 092 0,786 643 939 463 0,705 220 366 112 0,662 662 773 267 0,639 621 232 020 0,629 307 874 370	$1,855 \cdot 10^{-19}$

Zadania

1. Wiedząc, że $h_0 = 1$, a $h_1 = 2x$, znaleźć cztery kolejne zmodyfikowane wielomiany Hermite'a. Odpowiedź:

$$\begin{aligned} h_2 &= 4x^2 - 2, & h_3 &= 8x^3 - 12x, \\ h_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & h_5 &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned}$$

2. Wyprowadzić wzór Gaussa-Hermite'a dla dwóch rzędnych dla funkcji wagowej $e^{-x^2/2}$ i e^{-x^2} , tj. podać położenie rzędnych i ich mnożniki.

Rozwiązanie. W przypadku funkcji wagowej $e^{-x^2/2}$ położenie rzędnych określają pierwiastki wielomianu $H_2 = x^2 - 1$ (patrz zadanie 1 w § 28). Miejsca zerowe wynoszą $x_{1,2} = \pm 1$. Mnożniki dane są wzorem (20.7). Stąd $M_{1,2} = \sqrt{(1/2)\pi}$.

W przypadku funkcji wagowej e^{-x^2} położenie rzędnych określają pierwiastki wielomianu $h_2 = 4x^2 - 2$ (patrz zadanie 1). Miejsca zerowe wynoszą $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$. Mnożniki dane są wzorem (20.11). Stąd: $M_{1,2} = \sqrt{(1/4)\pi}$.

Zauważmy, że w pierwszym przypadku odcięte węzłów i mnożniki są $\sqrt{2}$ razy większe, niż w drugim przypadku.

3. Wyprowadzić wzór Gaussa-Hermite'a dla trzech rzędnych dla funkcji wagowej $e^{-x^2/2}$ i e^{-x^2} , tj. podać położenie rzędnych i ich mnożniki.

Rozwiązanie. W przypadku funkcji wagowej $e^{-x^2/2}$ położenie rzędnych określają miejsca zerowe wielomianu $H_3 = x^3 - 3x$ (patrz zadanie 1 w § 28). Są one następujące: $x_2 = 0$, $x_{1,3} = \pm\sqrt{3}$. Mnożniki dane są wzorem (20.7). Stąd $M_2 = \sqrt{2/3}\sqrt{(2\pi)}$, $M_{1,3} = \sqrt{1/6}\sqrt{(2\pi)}$.

W przypadku funkcji wagowej e^{-x^2} położenie rzędnych określają pierwiastki wielomianu $h_3 = 8x^3 - 12x$ (patrz zadanie 1). Miejsca zerowe wynoszą $x_2 = 0$, $x_{1,3} = \pm\sqrt{3/2}$. Mnożniki dane są wzorem (20.11). Stąd $M_2 = \sqrt{2/3}\sqrt{\pi}$, $M_{1,3} = \sqrt{1/6}\sqrt{\pi}$.

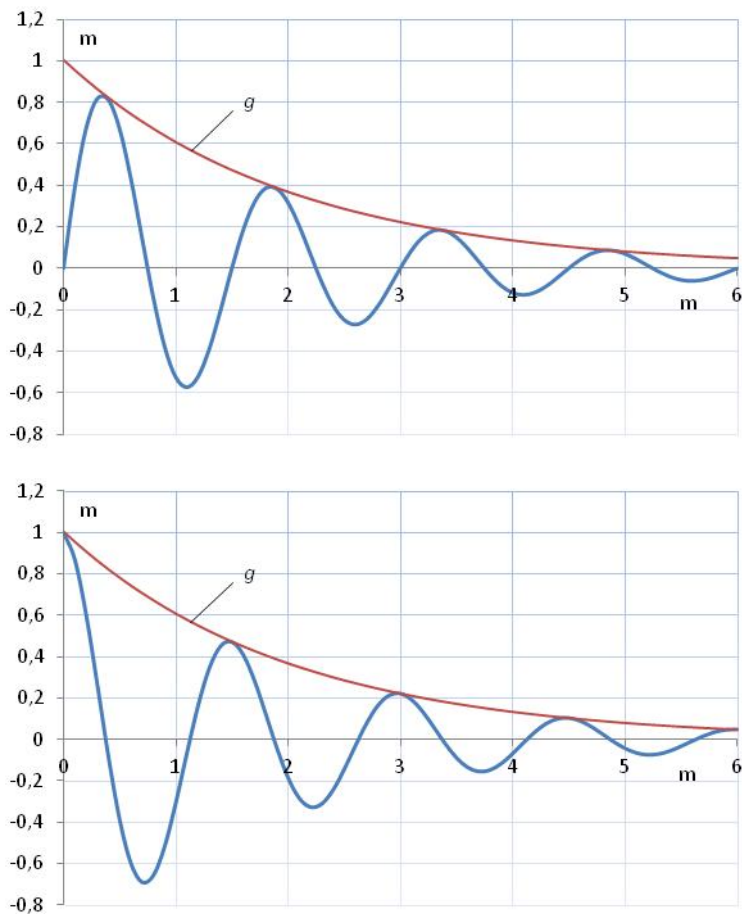
Zauważmy, że podobnie jak w zadaniu 2, odcięte węzłów i mnożniki w pierwszym przypadku są $\sqrt{2}$ razy większe, niż w drugim przypadku.

4. Pokazać, że stała we wzorze (20.8) na błąd Δ jest $2^{n+1/2}$ razy większa, niż stała $c\sqrt{\pi}$ we wzorze (20.8) na błąd Δ .

SPECJALNE METODY CAŁKOWANIA

§ 21. Całkowanie tłumionych funkcji okresowych

W zastosowaniach spotyka się funkcje oscylujące typu $g(x)\sin bx$ czy $g(x)\cos bx$, gdzie $g(x)$ odgrywa rolę zmiennej amplitudy oscylacji. Jeśli zmienna niezależna x jest w [m], stała b o wymiarze [rad/m] powiązana jest z okresem oscylacji zależnością $b = 2\pi/T$, gdzie T jest okresem funkcji sinus czy kosinus, tj. odległością między co drugim miejscem zerowym czy wierzchołkami (na rys. 22 okres $T = 1,5$ m).



Rys. 22. Funkcja oscylująca o stałym okresie T i zmiennej amplitudzie g
sinusowa (u góry), kosinusowa (u dołu)

Chcemy obliczyć całkę funkcji oscylującej na długości jednej oscylacji, tj. między trzema kolejnymi miejscami zerowymi lub dwoma wierzchołkami za pomocą wzoru: $g(x)$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T g(x) \sin bx dx = M_0 g_0 + M_1 g_1 + M_2 g_2 \\ C &= \int_0^T g(x) \cos bx dx = M_0 g_0 + M_1 g_1 + M_2 g_2 \end{aligned} \quad (21.1)$$

oraz określić rząd dokładności otrzymanego wzoru, gdzie g_0 , g_1 i g_2 są amplitudami (rzędnymi) funkcji $g(x)$ na początku, w środku i na końcu przedziału całkowania o długości $T = 2\pi/b$. Inaczej mówiąc, chcemy obliczyć całkę, nie posługując się wartościami funkcji podcałkowej (linia falista na rys. 22), lecz jej obwiednią $g(x)$, która ma przebieg regularny. Obliczenie takie jest możliwe, jeśli za funkcję wagową obierzemy funkcję okresową $\theta(x) = \sin bx$ czy $\cos bx$.

Mnożniki wyznacza układ (3.4). Przyjmując biegun x_0 w początku układu, zmienna $l = x$. Stąd momenty funkcji wagowej:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^T \sin bx dx = (1/b) \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0, \\ J_1 &= \int_0^T x \sin bx dx = (1/b)^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = -(1/b)^2 2\pi, \\ J_2 &= \int_0^T x^2 \sin bx dx = (1/b)^3 \int_0^{2\pi} t^2 \sin t dt = -(1/b)^3 (2\pi)^2. \end{aligned}$$

Całki powyższe przedstawiają pole, moment statyczny i moment bezwładności jednego cyklu funkcji sinus względem początku cyklu. Podane są w § 29d). Do wyznaczenia mnożników M_0 , M_1 i M_2 musimy wziąć trzy równania w układzie (3.4) dla $k = 0, 1$ i 2 :

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + M_2 &= 0, \\ \frac{1}{2} T M_1 + T M_2 &= -(1/b)^2 2\pi, \\ (\frac{1}{2} T)^2 M_1 + T^2 M_2 &= -(1/b)^3 (2\pi)^2. \end{aligned}$$

Upraszczając układ, przyjmie on postać:

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + M_2 &= 0, \\ \frac{1}{2} T M_1 + T M_2 &= -1/b, \\ \frac{1}{4} T M_1 + M_2 &= -1/b. \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} -M_0 &= M_2 = -1/b, \\ M_1 &= 0. \end{aligned}$$

Zatem:

$$\int_0^T g(x) \sin bx dx = (1/b)(g_0 - g_2). \quad (21.2)$$

Aby określić rząd dokładności otrzymanego wzoru, musimy sprawdzić, czy jest spełnione następne równanie dla $k = 3$:

$$(\frac{1}{2}T)^3 M_1 + T^3 M_2 = J_3,$$

gdzie:

$$J_3 = \int_0^T x^3 \sin bx dx = (1/b)^4 \int_0^{2\pi} t^3 \sin t dt = -(1/b)^4 [(2\pi)^3 - 6(2\pi)].$$

Upraszczając je, otrzymamy:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2})^3 M_1 + M_2 &= -(1/b)[1 - 6/(2\pi)^2], \\ 0 &\neq -6/(2\pi)^2. \end{aligned}$$

Równanie nie jest spełnione. Zatem wzór ma rząd dokładności $m = 2$.

Funkcja wagowa $\theta(x) = \sin bx$ ma okres $T = 2\pi/b$, zatem wyprowadzony wzór można stosować do całkowania złożonego, zwłaszcza gdy b jest duże (T jest małe). Sumując przyczynki od n przedziałów, otrzymamy proste wyrażenie:

$$\int_0^{nL} g(x) \sin bx dx = (1/b)(g_0 - g_{2n}), \quad (21.3)$$

czyli całka równa się różnicy rzędnej początkowej i końcowej, pomnożonej przez $1/b$.

Dla funkcji wagowej $\theta(x) = \cos bx$ momenty funkcji wagowej są następujące:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^T \cos bx dx = (1/b) \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0, \\ J_1 &= \int_0^T x \cos bx dx = (1/b)^2 \int_0^{2\pi} t \cos t dt = 0, \\ J_2 &= \int_0^T x^2 \cos bx dx = (1/b)^3 \int_0^{2\pi} t^2 \cos t dt = (1/b)^3 4\pi. \end{aligned}$$

Układ (3.4) przyjmuje więc postać:

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + M_2 &= 0, \\ \frac{1}{2}TM_1 + TM_2 &= 0, \\ (\frac{1}{2}T)^2 M_1 + T^2 M_2 &= (1/b)^3 4\pi. \end{aligned}$$

Upraszczając go, otrzymamy:

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + M_2 &= 0, \\ \frac{1}{2}M_1 + M_2 &= 0, \\ \frac{1}{4}M_1 + M_2 &= 1/\pi b. \end{aligned}$$

Stąd: $M_0 = M_2 = 2/\pi b,$
 $M_1 = -4/\pi b.$

Zatem:

$$\int_0^T g(x) \cos bx dx = (2/\pi b)(g_0 - 2g_1 + g_2). \quad (21.4)$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia strzałkę wygięcia amplitudy $g(x)$ w przedziale.

Mimo podobieństwa funkcji oscylacyjnych, wzór jest inny. Aby określić rząd jego dokładności, musimy sprawdzić, czy jest spełnione równanie dla $k = 3$:

$$(\frac{1}{2}T)^3 M_1 + T^3 M_2 = J_3,$$

gdzie: $J_3 = \int_0^T x^3 \cos ax dx = (1/b)^4 \int_0^{2\pi} t^3 \cos t dt = (1/b)^4 3(2\pi)^2,$

patrz § 29d). Upraszczając równanie dla $k = 3$ przez T^3 , otrzymamy:

$$(\frac{1}{2})^3 M_1 + M_2 = (1/b) 1,5/\pi,$$

$$0 \neq 1,5.$$

Równanie nie jest spełnione. Podobnie jak w poprzednim przypadku, ma rząd dokładności $m = 2$. Także i w tym przypadku wzór (21.4) możemy stosować do całkowania złożonego podprzedziałami o jednakowej długości T .

Dla amplitudy zmieniającej się wykładniczo, jak na rys. 22, różnica między wartością dokładną i numeryczną dla jednego podprzedziału jest około 0,002 dla funkcji sinusowej, a dla kosinusowej – około 0,0001.

Całki dane wzorami (21.1) są niczym innym, jak przekształceniami trygonometrycznymi amplitudy $g(x)$. Obliczenie ich byłoby proste, gdyby funkcje podcałkowe posiadały elementarną funkcję pierwotną. Tak jest jedynie w przypadku amplitudy $g(x) = e^{-ax}$ zmieniającej się wykładniczo. Mianowicie:

$$S = \int e^{-ax} \sin bx dx = -e^{-ax} (a \sin bx + b \cos bx) / (a^2 + b^2), \quad (21.5)$$

$$C = \int e^{-ax} \cos bx dx = -e^{-ax} (a \cos bx - b \sin bx) / (a^2 + b^2).$$

Wzory te otrzymuje się, wykonując dwukrotnie całkowanie przez części, co jest dosyć żmudne. Całkując od zera do zadanego x , otrzymamy krzywe całkowe:

$$S(x) = [b - e^{-ax} (a \sin bx + b \cos bx)] / (a^2 + b^2), \quad (21.6)$$

$$C(x) = [a - e^{-ax} (a \cos bx - b \sin bx)] / (a^2 + b^2).$$

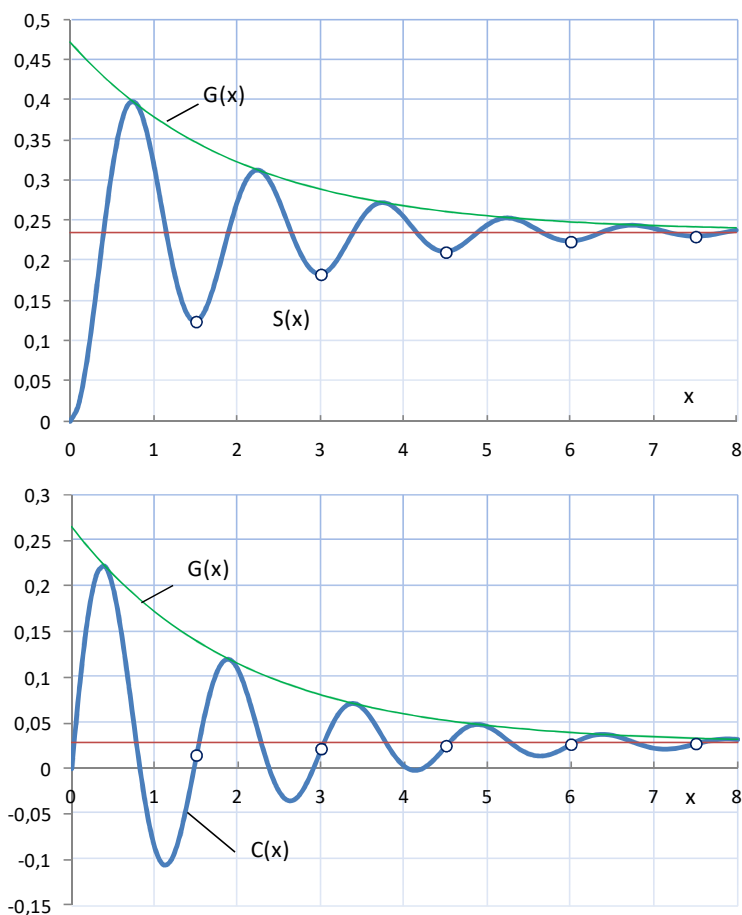
Widzimy, że w obu przypadkach oscylują one z amplitudą $G(x) = e^{-ax} / (a^2 + b^2)^{1/2}$, która dość szybko zanika ze wzrostem x . Dla $x > 4/a$ oscylacje są praktycznie niewidoczne, osiągając wartość graniczną (rys. 23). Z ogólnych własności krzywych całkowych wynika, że zerują się w punkcie początkowym, tj. $S_0 = C_0 = 0$, a wartości ekstremalne osiągają w miejscach zerowych funkcji całkowanych (§ 13), co potwierdza (rys. 23).

Gdy x zmierza do nieskończoności, krzywe całkowe (21.6) dążą do wartości granicznych S_∞ czy C_∞ , danych wzorami:

$$S_\infty \equiv \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = b / (a^2 + b^2), \quad (21.7)$$

$$C_\infty \equiv \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = a / (a^2 + b^2).$$

Dla sinusa i kosinusa tłumionego z rys. 22, krzywe całkowe pokazane na rys. 23 oscylują wokół odpowiedniej asymptoty poziomej S_∞ czy C_∞ , danej wzorem (21.7), z tym samym okresem T , co krzywe oryginalne, lecz miejsca zerowe są przesunięte – wypadają bowiem w punktach ekstremalnych funkcji całkowanych. Całkując sinusa tłumionego przedziałami o długości T , otrzymamy punkty w dolinach oscylacji, a w przypadku kosinusa tłumionego – nieznacznie poniżej asymptoty C_∞ .



Rys. 23. Krzywa całkowa sinusa tłumionego (u góry) i kosinusa tłumionego (u dołu)

Kładąc $a = 0$, ze wzorów powyższych wynikają całki nieokreślone:

$$\int_0^\infty \sin bx dx = 1/b,$$

$$\int_0^\infty \cos bx dx = 0,$$

mające znaczenie w teorii dystrybucji.

Wyznaczenie funkcji pierwotnych dla sinusa i kosinusa tłumionego, danych wzorami (21.5), jest dość żmudne. Jednak funkcję tę można prosto znaleźć, stosując zmienną zespoloną i wzór Eulera. Mianowicie:

$$\begin{aligned}
 C + iS &= \int e^{-ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = \int e^{-ax} e^{ibx} dx = \int e^{(-a+ib)x} dx = \\
 &= \frac{1}{-a+ib} e^{(-a+ib)x} = -\frac{a+ib}{a^2+b^2} e^{(-a+ib)x} = \\
 &= -\frac{a+ib}{a^2+b^2} e^{-ax} e^{ibx} = -\frac{a+ib}{a^2+b^2} e^{-ax} (\cos bx + i \sin bx) = \\
 &= -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2} (a+ib)(\cos bx + i \sin bx) = \\
 &= -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2} [(a \cos bx - b \sin bx) + i(a \sin bx + b \cos bx)].
 \end{aligned}$$

Biorąc część rzeczywistą i urojoną, otrzymamy funkcje pierwotne $C(x)$ oraz $S(x)$, dane wzorami (21.5). Jak widzimy, w tym przypadku znajdowanie funkcji pierwotnych sprowadza się do prostych działań algebraicznych.

Zadania

1. Obliczyć całkę sinusa tłumionego:

$$S = \int e^{-ax} \sin bx dx$$

na długości trzech oscylacji.

R o z w i ą z a n i e. Okres oscylacji sinusa wynosi $T = 2\pi/b$. Zatem mamy obliczyć całkę w przedziale od $x = 0$ do $x = 3T$. Krzywa całkowa sinusa tłumionego dana jest wzorem (21.6). Uwzględniając, że $\sin 3T = 0$, a $\cos 3T = 1$, otrzymamy:

$$S(3T) = \frac{b}{a^2 + b^2} (1 - e^{-3aT}).$$

Wzór łatwo uogólnić na n oscylacji. Uwzględniając, że $\sin nT = 0$, a $\cos nT = 1$, ze wzoru (21.6) otrzymamy:

$$S(nT) = \frac{b}{a^2 + b^2} (1 - e^{-naT}).$$

Punkty te wypadają w dolinie krzywej całkowej sinusa tłumionego (rys. 23).

2. Obliczyć całkę kosinusa tłumionego:

$$S = \int e^{-ax} \cos bx dx$$

na długości trzech oscylacji.

R o z w i ą z a n i e. Okres oscylacji kosinusa, tak jak sinusa, wynosi $T = 2\pi/b$. Zatem mamy obliczyć całkę w przedziale od $x = 0$ do $x = 3T$. Krzywa całkowa kosinusa tłumionego dana jest wzorem (21.6). Podstawiając $x = 3T$, otrzymamy:

$$S(3T) = \frac{a}{a^2 + b^2} (1 - e^{-3aT}).$$

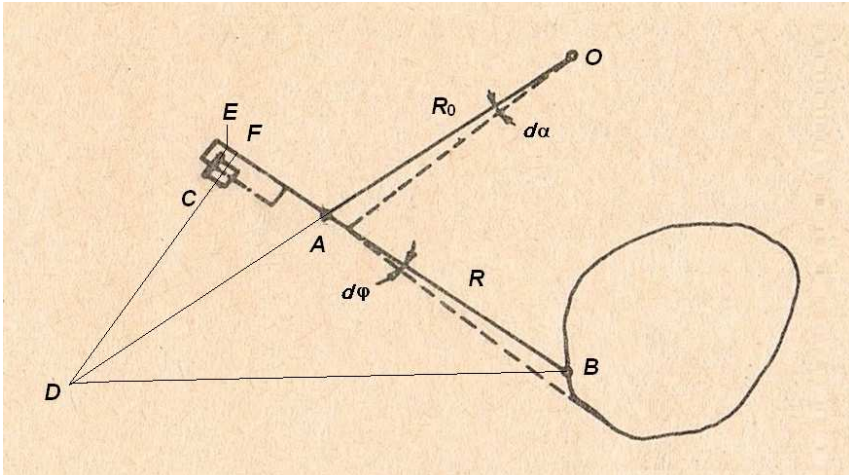
Na długości n oscylacji całka wynosi:

$$S(nT) = \frac{a}{a^2 + b^2} (1 - e^{-naT}).$$

Punkty te wypadają blisko asymptoty poziomej (rys. 23). W obu przypadkach sinusa i kosinusa tłumionego, odchyłki od asymptoty poziomej tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = e^{-aT}$.

§ 22. Planimetr

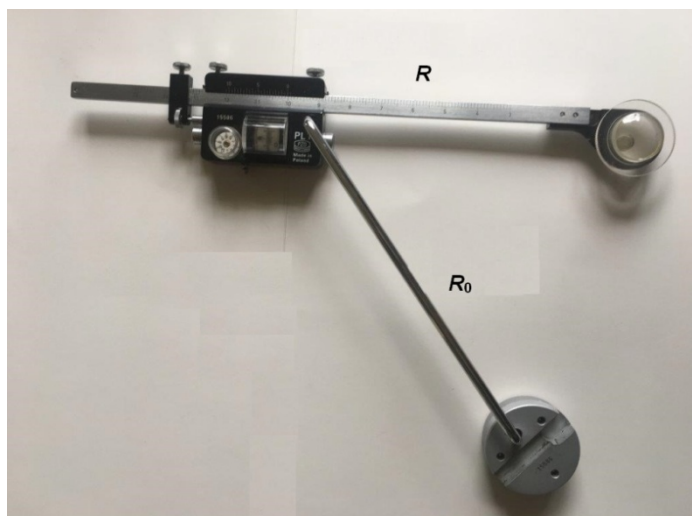
Planimetr jest przyrządem do mechanicznego całkowania, czyli obliczania pola figur płaskich o dowolnym kształcie. Ze względu na prostotę, szczególnie często stosowany jest planimetr biegunowy. Jego schemat pokazany jest na rys. 24.



Rys. 24. Schemat planimetru

Planimetr składa się z dwóch ramion $OA = R_0$ i $AB = R$, połączonych ze sobą przegubowo w punkcie A. W biegunie O znajduje się ciężarek zaopatrzony w ostrza, który

ustala biegun na płaszczyźnie rysunku. Ramię biegunowe R_0 z biegunem O połączone jest przegubowo. Położenie punktu A , a tym samym ramię R można zmieniać (rys. 25).



Rys. 25. Widok planimetru

Ramię wodzika R zaopatrzone jest w ostrze B (lub szkło powiększające), które służy do prowadzenia po konturze figury, której pole chcemy zmierzyć. W punkcie C znajduje się kółko całkujące, które obraca się na osi równoległej do ramienia R . Odsunięcie osi od ramienia nie wpływa na pomiar. Obroty kółka przenoszą się za pomocą ślimaka na tarczę rejestrującą obroty. Kółko całkujące ma bębenek z podziałką dzielącą obwód na 100 części. Umieszczony obok noniusz pozwala na odczytywanie obrotów kółka z dokładnością do 0,001 części obrotu.

Biegun może znajdować wewnątrz albo na zewnątrz figury. Z reguły umieszczany jest na zewnątrz konturu. Mierzone pole wyraża się wówczas wzorem:

$$A = c_1 n_1,$$

gdzie n_1 jest liczbą obrotów kółka, a c_1 pewną stałą.

Gdy biegun umieszczony jest wewnątrz konturu, wówczas:

$$A = c_2 + c_1 n_2,$$

gdzie c_1 i c_2 są stałymi planimetru. Można określić je doświadczalnie, robiąc dwukrotny pomiar pola, raz gdy biegun jest na zewnątrz, i drugi raz wewnątrz konturu.

Aby otrzymać prawidłowe wyniki należy pamiętać, że:

- kółko całkujące powinno obracać się swobodnie,
- blat stołu, na którym leży rysunek, winien być idealnie płaski, by kółko całkujące nie straciło kontaktu z płaszczyzną rysunku podczas dokonywania pomiaru,

- dobrze jest dokonać pomiaru pola dwukrotnie i przyjąć wartość średnią,
- należy zaczynać i kończyć oprowadzanie konturu dokładnie w tym samym punkcie. Aby zmniejszyć błędy powstające wskutek niedokładnego powrotu do punktu wyjściowego, ramię R powinno pokrywać się ze styczną do konturu w punkcie wyjściowym, a ramię R_0 winno być ustawione prostopadłe do ramienia R ,
- arkusz papieru, na którym wykonany jest rysunek, nie powinien być zbyt gładki (śliski).

Podstawy teoretyczne. Przemieszczając punkt B planimetru po konturze o niewielki odcinek, powodujemy obrót ramienia R_0 o kąt $d\alpha$ względem nieruchomego bieguna O , ramię R porusza się zaś ruchem płaskim. W ruchu takim istnieje chwilowy środek obrotu D , nieruchomy w przestrzeni, wokół którego pręt fizycznie wykonuje nieskończenie mały obrót (rys. 24). W przypadku pręta chwilowy środek obrotu znajduje się na przecięciu normalnych do przemieszczeń na końcach (normalna w punkcie A jest przedłużeniem ramienia R_0). Rzut chwilowego środka obrotu D na kierunek AB wyznacza punkt F , w którym przemieszczenie pokrywa się z prętem. Jednocześnie linia AB obraca się wokół tego punktu o kąt $d\varphi$. Odległość płaszczyzny kółka od punktu F wyznacza ramię obrotu $EF \equiv q$ kółka wokół punktu F . W przypadku pokazanym na rys. 24 ramię to jest małe, kółko praktycznie nie obracałoby się.

Chcemy określić pole, jakie zakreśli łamana OAB podczas nieskończenia małego przemieszczenia punktu B po konturze. Przyczynek od ramienia R_0 wynosi $\frac{1}{2}R_0^2 d\alpha$.

Wzdłużne przemieszczenie ramienia R nie daje żadnego przyczynku. Przyczynek daje obrót ramienia wokół punktu F , dany wzorem Pappusa-Guldina: $dA = Md\varphi$, gdzie M jest momentem statycznym ramienia R względem punktu obrotu F . Zatem:

$$M = R(\frac{1}{2}R + AF).$$

Podstawiając $AF = AE - q$, otrzymamy:

$$M = R(\frac{1}{2}R + AE - q).$$

Sumując przyczynki, otrzymamy:

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2}R_0^2 d\alpha + Md\varphi = \\ &= \frac{1}{2}R_0^2 d\alpha + R(\frac{1}{2}R + AE - q)d\varphi = \\ &= \frac{1}{2}R_0^2 d\alpha + R(\frac{1}{2}R + AE)d\varphi - Rqd\varphi. \end{aligned}$$

Ale $-qd\varphi = du$ jest przemieszczeniem kółka C , prostopadłe do osi obrotu. Stąd:

$$dA = \frac{1}{2}R_0^2 d\alpha + R(\frac{1}{2}R + AE)d\varphi + Rdu.$$

Całkując, otrzymamy pole całkowite, znalezione przez oprowadzenie całego konturu:

$$A = \frac{1}{2}R_0^2 \Delta\alpha + R(\frac{1}{2}R + AE)\Delta\varphi + Ru.$$

Jeśli biegun O leży poza konturem i rysik powraca do punktu wyjściowego, to $\Delta\alpha = \Delta\varphi = 0$. Stąd:

$$A = Ru.$$

Oznaczając liczbę obrotów kółka przez n_1 , a obwód kółka przez a , przemieszczenie kółka $u = n_1 a$, stąd:

$$A = Rn_1 a = c_1 n_1. \quad (22.1)$$

Gdy biegun znajduje się wewnątrz konturu, wówczas $\Delta\alpha = \Delta\varphi = 2\pi$. Stąd:

$$A = \frac{1}{2}R_0^2 2\pi + R(\frac{1}{2}R + AE)2\pi + Rn_2 a, \quad (22.2)$$

$$c_2 + c_1 n_2,$$

co podaliśmy już wcześniej.

Do niedawna planimetr był szeroko używany w okrętownictwie do obliczeń wypornościowych. Obecnie stosowany jest głównie w kartografii.

§ 23. Krzywe giętkowe

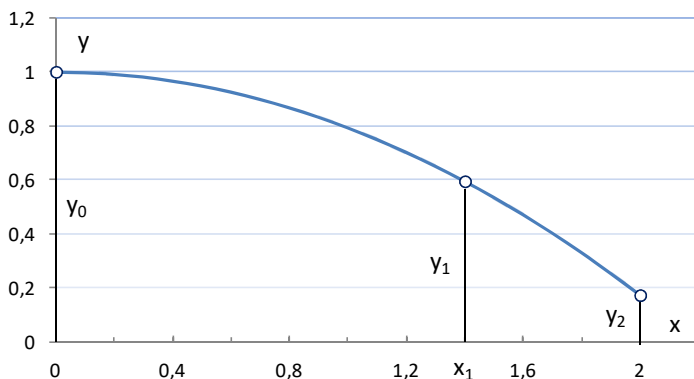
Do czasu wprowadzenia komputerowych technik kreślarskich do wykreślania linii teoretycznych kadłuba czy profili lotniczych stosowane były tak zwane „giętki” – długie listewki o przekroju kwadratowym ze sprężystego tworzywa sztucznego lub drewna. Po wygięciu ich do odpowiednich punktów, trzeba było docisnąć je do rysunku ciężarkami żeliwnymi, zwanymi „prosiakami”. Obecnie giętki straciły na znaczeniu.

Wykorzystamy giętkę do interpolacji i całkowania krzywych. Z teorii belek zginanych wynika, że krzywe giętkowe są klasy C^2 , tzn. że są ciągłe wraz z drugą pochodną. Trzecia pochodna jest nieciągła w miejscach przyłożenia ciężarków. Z istoty giętek wynika, że służą do rysowania długich krzywych w przedziale skończonym, jak ta na rys. 5.

a) Interpolacja trójpunktowa

Rozpatrzmy najprostsz przykład – znajdziemy krzywą giętkową przechodzącą przez trzy rzędne y_0, y_1, y_2 , położone w punktach x_0, x_1, x_2 , przy czym dodatkowo chcemy, by w początkowym punkcie styczna była pozioma, jak na rys. 26. Giętkę wyginamy tak, by przechodziła przez zadane punkty i była prostopadła do osi y w punkcie początkowym, przykładamy ciężarki i rysujemy. Jak uzyskać równanie takiej krzywej? Nie może to być wielomian interpolacyjny Lagrange'a (2.1), gdyż nie kontroluje pochodnych w węzłach. Wykorzystamy w tym celu równanie belki zginanej, znane z wytrzymałości materiałów, obciążonej momentami gnącymi i siłami poprzecznymi w zadanych punktach. Linia ugięcia takiej belki zmienia się przedziałami wyznaczonymi położeniem obciążeń skupionych. W przypadku belki, z powodu zadanej długości, rzędne ugięcia mogą być małe, a w przypadku giętki – dowolne. Ciągłość w obu przypadkach jest klasy C^2 .

W zadaniu mamy dwa przedziały, rozgraniczone rzędną w punkcie x_1 . Gdyby było więcej rzędnych, byłoby też więcej przedziałów.



Rys. 26. Krzywa giętkowa o trzech punktach

Wprowadźmy oznaczenia: $P \equiv y'''$, $M \equiv y''$. Przyjmijmy, że punkt początkowy $x_0 = 0$ znajduje się w początku układu, zaś $x_2 = l$ jest rozpiętością krzywej. Gdyby nie było rzędnej w punkcie x_1 , przebieg drugiej pochodnej byłby następujący:

$$y'' = M_0 + P_0x,$$

ważny w całym zakresie krzywej, gdzie M_0 jest drugą pochodną, a P_0 trzecią pochodną w punkcie początkowym. W drugim przedziale druga pochodna jest zmieniona o składnik $P_1(x - x_1)$. W wytrzymałości materiałów przyjęło się – dla uproszczenia – zapisywać pojawienie się nowego składnika w następujący sposób:

$$y'' = M_0 + P_0x|_{x_1} + P_1(x - x_1).$$

Zapis ten oznacza, że po przejściu do drugiego przedziału, czyli gdy $x > x_1$, należy dodać do wcześniejszego wyrażenia nowy składnik, przy czym poprzedni ważny jest w całym zakresie. Całkując drugą pochodną, otrzymamy pierwszą:

$$y' = C + M_0x + \frac{1}{2}P_0x^2|_{x_1} + \frac{1}{2}P_1(x - x_1)^2.$$

Całkując jeszcze raz, otrzymamy przebieg krzywej:

$$y = Cx + D + \frac{1}{2}M_0x^2 + \frac{1}{6}P_0x^3|_{x_1} + \frac{1}{6}P_1(x - x_1)^3,$$

gdzie C i D to stałe całkowania. W równaniu tym występuje 5 stałych, które musimy wyznaczyć z warunków zadania.

Dla $x = 0$, $y = y_0$, co daje $D = y_0$, $y' = 0$, stąd $C = 0$. Równanie na y przyjmuje więc postać:

$$y = y_0 + \frac{1}{2}M_0x^2 + \frac{1}{6}P_0x^3|_{x_1} + \frac{1}{6}P_1(x - x_1)^3. \quad (23.1)$$

Całkując je ponownie od 0 do bieżącego x , otrzymamy krzywą całkową:

$$Y = y_0x + \frac{1}{6}M_0x^3 + \frac{1}{24}P_0x^4 \Big|_{x_1} + \frac{1}{24}P_1(x - x_1)^4,$$

zmieniającą się od zera w punkcie początkowym $x = 0$, do wartości końcowej w punkcie $x = l$, która jest niczym innym, jak polem pod krzywą. Tak więc podstawiając we wzorze całkowym na Y odciętą końcową $x = l$, otrzymamy pole pod krzywą:

$$A = y_0l + \frac{1}{6}M_0l^3 + \frac{1}{24}P_0l^4 + \frac{1}{24}P_1(l - x_1)^4. \quad (23.2)$$

Pierwszy wyraz we wzorze przedstawia pole opisującego prostokąta. Pozostałe przedstawiają pole nad krzywą do poziomu $y = y_0$. Zależy ono od trzech parametrów: M_0 , P_0 , P_1 , jakie występują w równaniu krzywej (23.1). Musimy więc ułożyć trzy równania. Pierwsze z nich wynika z wartości krzywej w punkcie $x = x_1$. Stąd:

$$y_0 + \frac{1}{2}M_0x_1^2 + \frac{1}{6}P_0x_1^3 = y_1.$$

Drugie wynika z wartości krzywej na końcu. Podstawiając $x = l$, otrzymamy:

$$y_0 + \frac{1}{2}M_0l^2 + \frac{1}{6}P_0l^3 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3 = y_2.$$

Trzecie równanie wynika z zerowania się y'' na końcu krzywej w punkcie $x = l$. Podstawiając $x = l$, otrzymamy:

$$M_0 + P_0l + P_1(l - x_1) = 0.$$

Zestawiając je, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_0x_1^2 + \frac{1}{6}P_0x_1^3 &= y_1 - y_0, \\ \frac{1}{2}M_0l^2 + \frac{1}{6}P_0l^3 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3 &= y_2 - y_0, \\ M_0 + P_0l + P_1(l - x_1) &= 0, \end{aligned} \quad (23.3)$$

układ trzech równań z trzema niewiadomymi, który na liczbach ogólnych jest uciążliwy do rozwiązania. Wygodnie jest przedstawić go w formie bezwymiarowej:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_0x_1 + \frac{1}{6}P_0x_1^2 &= (y_1 - y_0)/x_1, \\ \frac{1}{2}M_0l + \frac{1}{6}P_0l^2 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3/l &= (y_2 - y_0)/l, \\ M_0l + P_0l^2 + P_1l(l - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając bezwymiarowe wielkości:

$$\begin{aligned} m_0 = M_0l, \quad p_0 = P_0l^2, \quad \alpha_1 = a_1/l, \quad \eta_2 = (y_2 - y_0)/l, \\ p_1 = P_1l^2, \quad \xi_1 = x_1/l, \quad \eta_1 = (y_1 - y_0)/x_1, \end{aligned} \quad (23.4)$$

gdzie $a_1 = l - x_1$ jest odległością rzędnej y_1 od końca krzywej, układ przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\xi_1 m_0 + \frac{1}{6}\xi_1^2 p_0 &= \eta_1, \\
\frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{6}p_0 + \frac{1}{6}\alpha_1^3 p_1 &= \eta_2, \\
m_0 + p_0 + \alpha_1 p_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{23.5}$$

gdzie η_1 i η_2 to współczynniki kierunkowe siecznych, poprowadzonych przez rzędną początkową i daną rzędną. Układ ten rozwiążemy metodą eliminacji zmiennych. Z dwóch ostatnich równań łatwo otrzymamy m_0 i p_0 :

$$\begin{aligned}
m_0 &= -\frac{1}{2}(\alpha_1 - 1/\alpha_1)\alpha_1^2 p_1 + 3\eta_2, \\
p_0 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 - 3/\alpha_1)\alpha_1^2 p_1 - 3\eta_2.
\end{aligned} \tag{23.6}$$

Gdy wstawimy je do pierwszego równania, otrzymamy równanie na p_1 :

$$p_1 \left[-\frac{1}{4}(\alpha_1 - 1/\alpha_1)\xi_1 + \frac{1}{12}(\alpha_1 - 3/\alpha_1)\xi_1^2 \right] \alpha_1^2 = \eta_1 - (\frac{3}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_1^2)\eta_2. \tag{23.7}$$

Wyznaczenie p_1 określa parametry m_0 i p_0 , które definiują przebieg krzywej, danej wzorem (23.1) oraz pole pod nią, dane wzorem (23.2). Obydwa wzory można przedstawić w kategoriach bezwymiarowych. Przekształcenie wzoru (23.1) jest następujące:

$$y = y_0 + l \left[\frac{1}{2}(M_0/l)x^2 + \frac{1}{6}(P_0/l)x^3 \right] x_1 + \frac{1}{6}(P_1/l)(x - x_1)^3,$$

gdzie przed nawias wyciągnęliśmy rozpiętość l . Uwzględniając, że:

$$\begin{aligned}
M_0/l &= m_0/l^2, & P_0/l &= p_0/l^3, \\
P_1/l &= p_1/l^3,
\end{aligned}$$

równanie krzywej przyjmie postać:

$$y = y_0 + l \left[\frac{1}{2}m_0\xi^2 + \frac{1}{6}p_0\xi^3 \right] \xi_1 + \frac{1}{6}p_1(\xi - \xi_1)^3, \tag{23.8}$$

gdzie $\xi = x/l$ jest bezwymiarową odcietą.

Pole pod krzywą, dane wzorem (23.2), możemy wyrazić analogicznie:

$$A = y_0 l + l^2 \left[\frac{1}{6}m_0 + \frac{1}{24}p_0 + \frac{1}{24}p_1(1 - \xi_1)^4 \right]. \tag{23.9}$$

Gdy krzywa zadana jest przez więcej rzędnych, obliczanie parametrów krzywej trzeba znajdować z układu o wielu niewiadomych. Musimy korzystać wtedy z postaci macierzowej układu równań. Dla układu (23.5) postać ta jest następująca:

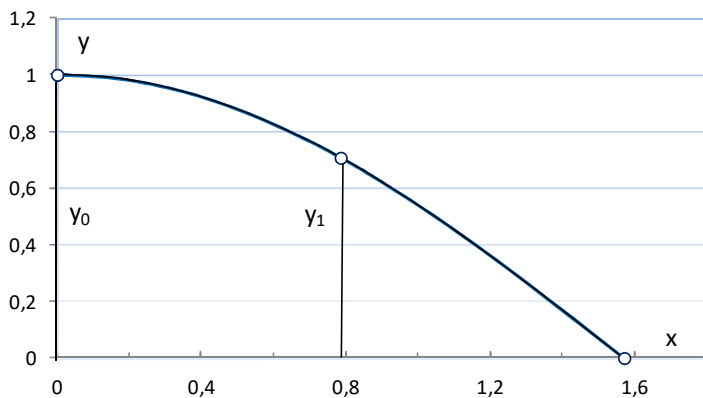
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi_1 & \frac{1}{6}\xi_1^2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\alpha_1^3 \\ 1 & 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23.10}$$

Pierwsza macierz jest macierzą współczynników A w układzie (23.5), druga wektorem niewiadomych $X(m_0, p_0, p_1)$, a trzecia kolumną wyrazów wolnych B . Równanie macierzowe $AX = B$ jest równoważne układowi równań liniowych. Rozwiązaniem jest wektor $X = A^{-1}B$. Działania te łatwo wykonać w Excelu.

Inną możliwością jest wyznaczenie niewiadomych za pomocą wzorów Cramera, gdzie n -ta niewiadoma $x_n = W_n/W$ jest równa ilorazowi *wyznacznika pomocniczego* W_n i *wyznacznika głównego* macierzy wyjściowej $W \equiv |A|$. Wyznacznik pomocniczy jest wyznacznikiem zmodyfikowanej macierzy A , w której n -ta kolumna zastąpiona jest wektorem wyrazów wolnych.

PRZYKŁAD 22. Aproksymować funkcję $\cos x$ w przedziale $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ za pomocą krzywej giętkowej o trzech rzędnych w punktach 0° , 45° i 90° .

R o z w i ą z a n i e. Rzędne funkcji w zadanych punktach wynoszą: 1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 0. Rozpiętość krzywej $l = \frac{1}{2}\pi$. Rzędna środkowa leży w połowie rozpiętości, zatem $\xi_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$. Współczynniki kierunkowe siecznych wynoszą $\eta_1 = -0,37292$, $\eta_2 = -0,63662$. Parametr p_1 , obliczony wg wzoru (23.7) wynosi $p_1 = 1,369461$. Z kolei parametry m_0 i p_0 , dane wzorami (23.6) wynoszą: $m_0 = -1,653085$, $p_0 = 0,968355$. Znajomość tych parametrów pozwala napisać równanie krzywej giętkowej, przechodzącej przez zadane punkty. Porównanie interpolacji giętkowej z funkcją $\cos x$ pokazane jest na rys. 27.

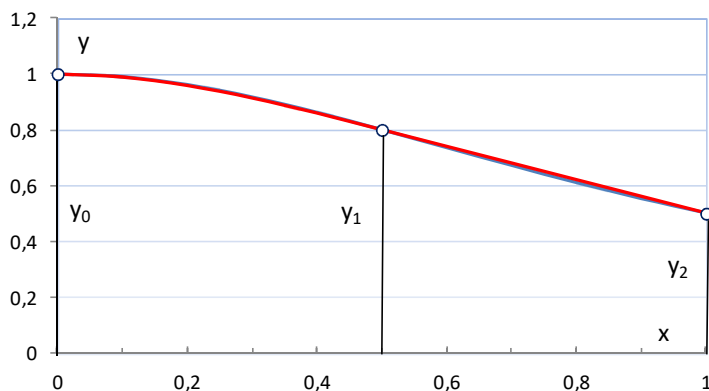


Rys. 27. Interpolacja giętkowa trójpunktowa funkcji $\cos x$

Jak widać, obie krzywe pokrywają się ze sobą, błąd bowiem nie przekracza grubości linii. Z wyjątkiem wąskiego otoczenia punktu $45^\circ \approx 0,707$, błąd jest ujemny; minimalna wartość ujemna nieznacznie przekracza $-0,001$. Pole pod krzywą, obliczone wg wzoru (23.9), wynosi $A = 0,99935$, gdy wartość dokładna pola pod funkcją $\cos x$ wynosi 1. Świadczy to o wysokiej dokładności interpolacji giętkowej, mimo małej liczby punktów.

PRZYKŁAD 23. Obliczyć liczbę π daną za pomocą całki $\frac{1}{4}\pi = \int_0^1 dx/(1+x^2)$, stosując interpolację giętkową o trzech rzędnych w punktach: 0, 0,5 i 1.

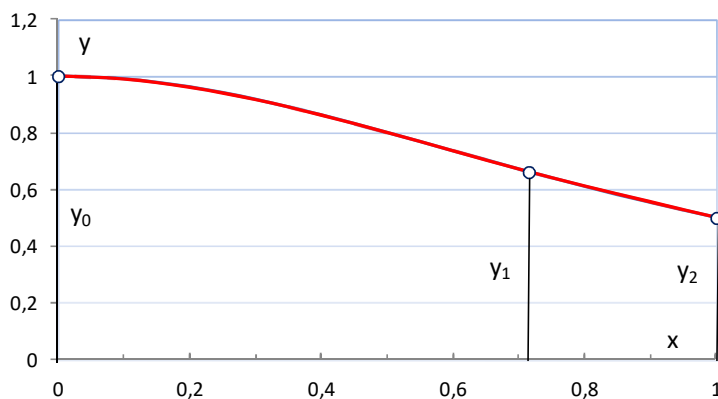
R o z w i ą z a n i e. Rzędne funkcji w zadanych punktach wynoszą: 1, 0,8 i 0,5. Rozpiętość krzywej $l = 1$. Rzędna środkowa leży w połowie rozpiętości, zatem $\xi_1 = \alpha_1 = 1/2$. Współczynniki kierunkowe siecznych wynoszą $\eta_1 = -0,4$, $\eta_2 = -0,5$. Parametr $p_1 = -4,8$. Z kolei parametry m_0 i p_0 wynoszą $m_0 = -2,4$, $p_0 = 4,8$. Definiują one równanie krzywej giętkowej, przechodzącej przez zadane punkty. Porównanie interpolacji giętkowej z funkcją podcałkową pokazane jest na rys. 28.



Rys. 28. Interpolacja giętkowa trójpunktowa funkcji $1/(1+x^2)$

Dokładność aproksymacji jest w tym przypadku gorsza niż poprzednio, zwłaszcza w drugiej części, gdzie błąd osiąga 0,01. Pole pod krzywą giętkową wynosi $A = 0,7875$, co daje liczbę π o małej dokładności, zaledwie 3,15.

Jakość aproksymacji zależy od położenia punktu środkowego. Jeśli przyjąć go w $x_1 = 0,715$, maksymalny błąd aproksymacji spadnie prawie 5-krotnie, dając liczbę $\pi = 3,141531$, której dopiero 5. miejsce po przecinku jest niedokładne. Porównanie interpolacji giętkowej z funkcją podcałkową pokazane jest na rys. 29. Gołym okiem widać, że jest lepsza, niż na rys. 28.



Rys. 29

Gdy w punkcie początkowym giętka jest swobodnie podparta, druga pochodna zeruje się: $y'' = M_0 = 0$. W otoczeniu zera krzywa ma więc pewne nachylenie C . Postać krzywej giętkowej jest wówczas następująca:

$$y = y_0 + Cx + \frac{1}{6}P_0x^3 + \frac{1}{6}P_1(x - x_1)^3. \quad (23.11)$$

Mamy trzy parametry do wyznaczenia: C , P_0 i P_1 . Z analogicznych warunków jak poprzednio wynika układ równań na parametry aproksymacji:

$$\begin{aligned} Cx_1 + \frac{1}{6}P_0x_1^3 &= y_1 - y_0, \\ Cl + \frac{1}{6}P_0l^3 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3 &= y_2 - y_0, \\ P_0l + P_1(l - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Forma bezwymiarowa układu jest następująca:

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{6}P_0x_1^2 &= (y_1 - y_0)/x_1, \\ C + \frac{1}{6}P_0l^2 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3/l &= (y_2 - y_0)/l, \\ P_0l^2 + P_1l(l - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Z użyciem parametrów bezwymiarowych, układ przyjmie postać:

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{6}p_0\xi_1^2 &= \eta_1, \\ C + \frac{1}{6}p_0 + \frac{1}{6}p_1\alpha_1^3 &= \eta_2, \\ p_0 + p_1\alpha_1 &= 0. \end{aligned} \quad (23.12)$$

Z dwóch ostatnich równań łatwo otrzymamy C i p_0 :

$$\begin{aligned} C &= \eta_2 - \frac{1}{6}(\alpha_1 - 1/\alpha_1)\alpha_1^2p_1, \\ p_0 &= -p_1\alpha_1. \end{aligned} \quad (23.13)$$

Gdy wstawimy je do pierwszego równania, otrzymamy równanie na p_1 :

$$p_1[-\frac{1}{6}(\alpha_1 - 1/\alpha_1) - \frac{1}{6}\xi_1^2/\alpha_1]\alpha_1^2 = \eta_1 - \eta_2. \quad (23.14)$$

Wyznaczenie p_1 określa parametry C i p_0 , które definiują przebieg krzywej giętkowej, danej wzorem (23.11) oraz pole pod nią, dane wzorem:

$$A = y_0l + \frac{1}{2}Cl^2 + \frac{1}{24}P_0l^4 + \frac{1}{24}P_1(l - x_1)^4.$$

Obydwa wzory można przedstawić w kategoriach bezwymiarowych:

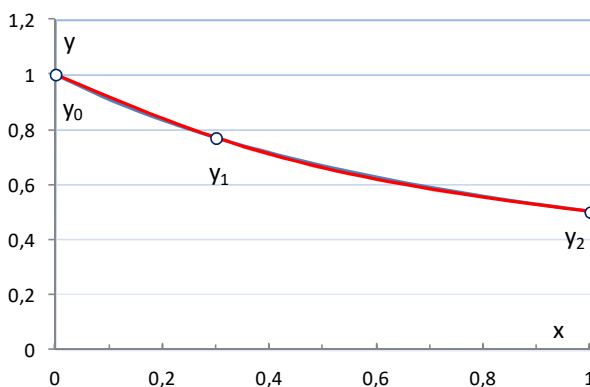
$$y = y_0 + l[C\xi + \frac{1}{6}p_0\xi^3 + \frac{1}{6}p_1(\xi - \xi_1)^3], \quad (23.15)$$

$$A = y_0l + l^2[\frac{1}{2}C + \frac{1}{24}p_0 + \frac{1}{24}p_1(1 - \xi_1)^4]. \quad (23.16)$$

W stosunku do poprzedniego przypadku, zmienił się tylko pierwszy wyraz w nawiasie kwadratowym.

PRZYKŁAD 24. Obliczyć całkę $\int_0^1 dx/(1+x)$ za pomocą krzywej giętkowej o trzech rzędnych w punktach 0, 0,3 i 1.

R o z w i ą z a n i e. Rzędne funkcji w zadanych punktach wynoszą: 1, $^{10}_{13}$ i $1/2$. Rozpiętość krzywej $l = 1$. Dla danego położenia rzędnej środkowej $\xi_1 = 0,3$, $\alpha_1 = 0,7$. Współczynniki kierunkowe siecznych wynoszą $\eta_1 = -0,76923$, $\eta_2 = -0,5$. Parametr $p_1 = -5,49451$. Z kolei parametr $C = -0,82692$, $p_0 = 3,846154$. Pole pod krzywą giętkową wynosi $A = 0,69183$, gdy dokładna wartość całki wynosi $\ln 2 = 0,69315$, błąd wynosi zatem $-0,00132$. Porównanie interpolacji giętkowej z funkcją podcałkową pokazane jest na rys. 30.



Rys. 30. Interpolacja giętkowa trójpunktowa funkcji $1/(1+x)$

Dokładność interpolacji giętkowej można zwiększyć, zwiększając liczbę rzędnych.

b) Analiza ugięcia giętki

Ugięcie giętki powodują przyłożone momenty gnące i siły (zadane drugie i trzecie pochodne). Rozpatrzmy poziomy odcinek giętki o długości l , na końcach którego zadane są drugie pochodne $M_0 \equiv y_0''$ i $M_2 \equiv y_2''$. Znajdźmy linię ugięcia.

Wykorzystując wcześniejsze rozważania oraz uwzględniając, że wewnątrz przedziału giętki jest swobodna, równanie krzywej giętkowej jest następujące:

$$y = Cx + D + \frac{1}{2}M_0x^2 + \frac{1}{6}P_0x^3,$$

gdzie C i D to stałe całkowania, a P_0 jest trzecią pochodną w punkcie początkowym. Trzy stałe: C , D i P_0 musimy wyznaczyć z warunków zadania. Dla $x = 0$, $y = 0$, co daje $D = 0$. Równanie linii ugięcia jest więc następujące:

$$y = Cx + \frac{1}{2}M_0x^2 + \frac{1}{6}P_0x^3. \quad (23.17)$$

Dla $x = l$, $y = 0$, zaś $y''(l) = M_2$, co daje równania na dwie niewiadome C i P_0 :

$$Cl + \frac{1}{2}M_0l^2 + \frac{1}{6}P_0l^3 = 0,$$

$$M_0 + P_0l = M_2.$$

Z drugiego równania wynika, że:

$$P_0 = (M_2 - M_0)/l = \Delta M/l.$$

Dla tych, co znają mechanikę, wynik jest oczywisty – przyrost momentu (gnącego) ΔM równa się momentowi pary sił na końcach belki. Gdy druga pochodna linii ugięcia na końcach jest taka sama, tj. momenty gnące na końcach są takie same, $P_0 = 0$, tym samym na całej długości belki jest stała wartość $y'' = \text{const}$, co jest własnością paraboli. Ściśle rzecz biorąc, linia ugięcia jest wówczas łukiem okręgu. Dla małej strzałki ugięcia różnica między parabolą i łukiem koła jest niezauważalna.

Z pierwszego równania wynika stała C (nachylenie krzywej na początku):

$$C = -(\frac{1}{2}M_0 + \frac{1}{6}\Delta M)l.$$

Na drugim końcu odcinka giętki nachylenie krzywej $C_2 = y'(l)$ jest równe:

$$C_2 = (\frac{1}{2}M_0 + \frac{1}{3}\Delta M)l,$$

gdzie $\Delta M = M_2 - M_0$. Widzimy, że gdy y'' na końcu jest większe od wartości początkowej nachylenie krzywej, co do modułu, jest większe od nachylenia na początku.

Gdy $y'' = \text{const}$, co zachodzi gdy $M_2 = M_0$, P_0 zeruje się, równanie ugięcia belki przechodzi w parabolę:

$$y = Cx + \frac{1}{2}M_0x^2,$$

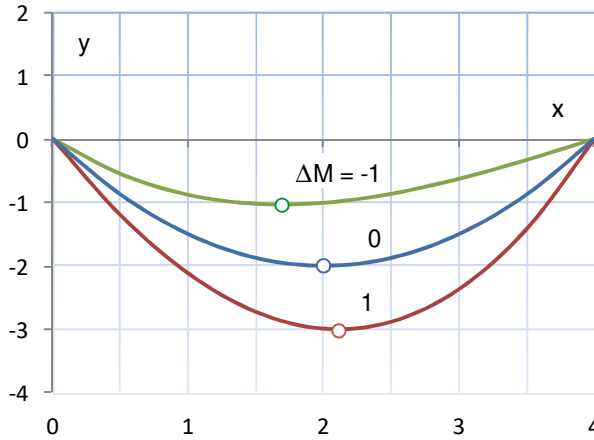
której strzałka ugięcia $s = -\frac{1}{4}M_0l^2$.

Gdy $M_2 > M_0$, równanie ugięcia jest wielomianem trzeciego stopnia (23.17). Można przedstawić je w postaci:

$$y = \frac{1}{2}M_0(x^2 - lx) + \frac{1}{6}\Delta M(x^3/l - lx).$$

Pierwsza część wzoru przedstawia ugięcie wywołane jednakową krzywizną na całej długości (część paraboliczna), zaś druga część przedstawia przyczynek do ugięcia wywołany zmianą krzywizny na końcu giętki. Pierwsza część jest proporcjonalna do M_0 , a druga – do przyrostu krzywizny ΔM na końcu giętki.

Przebieg linii ugięcia pokazany jest na rys. 31 dla $M_0 = 1$ i różnych ΔM ; $\Delta M = -1$ oznacza brak krzywizny giętki na końcu odcinka ($M_2 = 0$), czyli podparcie swobodne. Z powodu proporcjonalności względem ΔM odchyłki ugięcia belki od ugięcia parabolicznego, odstęp pomiędzy krzywymi na rys. 31 jest jednakowy. Z rysunku widać, że minimum ugięcia przesuwają się ze wzrostem ΔM w kierunku końca giętki oraz że ugięcie zmienia się istotnie ze zmianą ΔM , czyli ze zmianą krzywizny M_2 na końcu giętki.



Rys. 31. Ugięcie giętki obciążonej momentami gnącymi na końcach

Maksymalne ugięcie występuje w punkcie:

$$x_{\min} = \frac{1}{P_0} \left(-M_0 + \sqrt{M_0^2 - 2CP_0} \right)$$

Podstawiając $x = x_{\min}$ w równaniu (23.17) otrzymamy strzałkę ugięcia s .

Linie ugięcia, pokazane na rys. 31, mają dwa stopnie swobody: M_0 i ΔM . Chcemy zbadać wpływ trzeciego stopnia swobody, którym jest miejsce usztywnienia giętki. W oparciu o wcześniejsze rozważania, ugięcie belki wyrazi się wzorem:

$$y = Cx + \frac{1}{2}M_0x^2 + \frac{1}{6}P_0x^3 \Big|_{x_1} + \frac{1}{6}P_1(x - x_1)^3,$$

gdzie x_1 jest miejscem usztywnienia giętki, zaś P_1 jest trzecią pochodną linii ugięcia w miejscu usztywnienia, proporcjonalną do siły przytrzymującej giętkę w tym punkcie.

W równaniu występują trzy stałe: C , P_0 i P_1 , które musimy wyznaczyć z warunków zadania. Dwa warunki obieramy takie same, jak poprzednio, tj. na krańcach linia ugięcia ma się zerować i przyjmować zadane wartości momentów gnących M_0 i M_2 . Jako trzeci warunek przyjmujemy osiągnięcie zadanego ugięcia w punkcie x_1 . Otrzymamy trzy równania:

$$\begin{aligned} Cl + \frac{1}{2}M_0l^2 + \frac{1}{6}P_0l^3 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3 &= 0, \\ Cx_1 + \frac{1}{2}M_0x_1^2 + \frac{1}{6}P_0x_1^3 &= y_1, \\ M_0 + P_0l + P_1(l - x_1) &= M_2. \end{aligned} \quad (23.18)$$

Z ostatniego równania wynika, że w skrajnych przypadkach, tj. gdy $x_1 = 0$ lub gdy $x_1 = l$, siła $P_1 = 0$, czyli wówczas mamy poprzedni przypadek pokazany na rys. 31. Z twierdzenia Rolle'a wynika, że największa zmiana linii ugięcia w stosunku do giętki obciążonej

momentami gnącymi na końcach występuje, gdy punkt usztywnienie giętki $x_1 \approx 1/2l$, czyli gdy usztywnienie występuje w pobliżu połowy rozpiętości giętki.

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe (23.4), układ (23.18) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{6}p_0 + \frac{1}{6}\alpha_1^3 p_1 &= -\frac{1}{2}m_0, \\ C + \frac{1}{6}\xi_1^2 p_0 &= \eta_1 - \frac{1}{2}m_0\xi_1, \\ p_0 + \alpha_1 p_1 &= \Delta m, \end{aligned} \quad (23.19)$$

gdzie $\Delta m = (\Delta M)l$. Postać macierzowa układu (23.19) jest następująca:

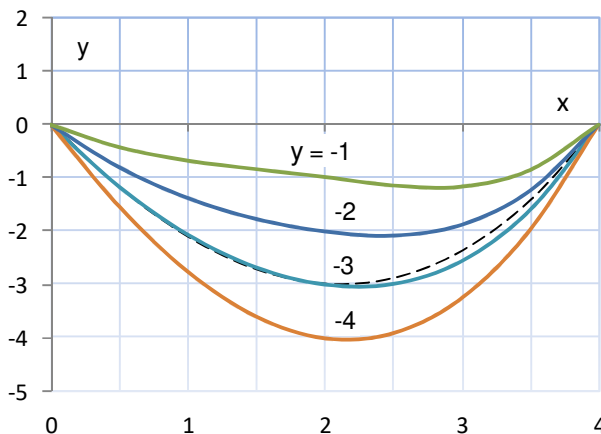
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\alpha_1^3 \\ 1 & \frac{1}{6}\xi_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_0 \\ \eta_1 - \frac{1}{2}m_0\xi_1 \\ \Delta m \end{bmatrix} \quad (23.20)$$

Równanie krzywej, w kategoriach wielkości bezwymiarowych, przyjmie postać:

$$y = l[C\xi + \frac{1}{2}m_0\xi^2 + \frac{1}{6}p_0\xi^3 | \xi_1 + \frac{1}{6}p_1(\xi - \xi_1)^3], \quad (23.21)$$

gdzie $\xi = x/l$ jest bezwymiarową odciętą. Z układu (23.20) widać, że gdy punkt (x_1, y_1) jest ustalony, linia ugięcia ma dwa stopnie swobody M_0 i ΔM . Gdy M_0 i ΔM są ustalone, mamy jeden stopień swobody – rzędną ugięcia giętki y_1 w zady punkcie x_1 .

Przebieg linii ugięcia dla $M_0 = 1$ i $\Delta M = 1$ pokazany jest na rys. 32 w zależności od ugięcia w środku giętki, zmieniającego się od -1 do -4 . Widzimy, że gdy ugięcie w środku $y > -2$, na linii ugięcia pojawia się wklęsłość, a strzałka ugięcia przesuwa się ku końcowi.

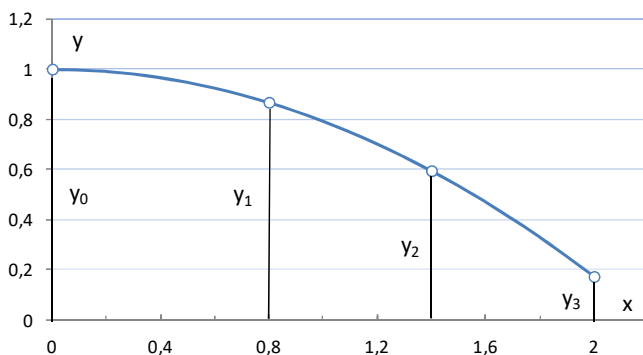


Rys. 32. Ugięcie giętki obciążonej momentami na końcach w zależności od ugięcia w środku

Warto zwrócić uwagę, że przebieg ugięcia giętki zginanej tylko momentami (linia przerywana na rys. 32) i giętki obciążonej dodatkowo siłą są różne, mimo tego samego ugięcia w wybranym punkcie. W pierwszym momencie stwierdzenie to wydaje się nie-dorzeczne. Musimy jednak pamiętać, że kształt ugięcia giętki obciążonej momentami i kształt giętki obciążonej dodatkowo siłą jest inny. Stąd przy tej samej rzędnej w jakimś punkcie, krzywe te rozchodzą się. Patrz też zadanie 2.

c) Interpolacja wielopunktowa

Gdy zakres funkcji (krzywej) jest duży, musimy stosować więcej rzędnych do jej zdefiniowania, niż trzy. Przyjmijmy, że zastosujemy cztery rzędne, jak na rys. 33.



Rys. 33

Postępując podobnie, jak w przypadku trzech rzędnych, przebieg drugiej pochodnej dany jest wzorem:

$$y'' = M_0 + P_0x|x_1 + P_1(x - x_1)|x_2 + P_2(x - x_2). \quad (23.22)$$

Zapis ten oznacza, że dwa pierwsze składniki $M_0 + P_0x$ ważne są na całej długości przedziału interpolacji, w punkcie x_1 pojawia się drugi składnik $P_1(x - x_1)$, ważny od punktu x_1 do końca, w punkcie x_2 pojawia się trzeci składnik $P_2(x - x_2)$, ważny od punktu x_2 do końca itd., gdyby było więcej rzędnych.

Równanie krzywej jest analogiczne do wzoru (23.8):

$$y = y_0 + \frac{1}{2}M_0x^2 + \frac{1}{6}P_0x^3|x_1 + \frac{1}{6}P_1(x - x_1)^3|x_2 + \frac{1}{6}P_2(x - x_2)^3. \quad (23.23)$$

Widzimy, że krzywa giętkowa aproksymowana jest odcinkami jednomianami trzeciego stopnia. Podobnie, wzór na pole pod krzywą jest analogiczny do wzoru (23.9):

$$A = y_0l + \frac{1}{6}M_0l^3 + \frac{1}{24}P_0l^4 + \frac{1}{24}P_1(l - x_1)^4 + \frac{1}{24}P_2(l - x_2)^4. \quad (23.24)$$

Mamy teraz cztery niewiadome: M_0 , P_0 , P_1 i P_2 . Wyznamy je z warunków, że krzywa ma przechodzić przez trzy rzędne: y_1 , y_2 i y_3 oraz że druga pochodna ma zerować

się na końcu krzywej. Otrzymamy układ równań analogiczny do (23.3):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_0x_1^2 + \frac{1}{6}P_0x_1^3 &= y_1 - y_0, \\ \frac{1}{2}M_0x_2^2 + \frac{1}{6}P_0x_2^3 + \frac{1}{6}P_1(x_2 - x_1)^3 &= y_2 - y_0, \\ \frac{1}{2}M_0l^2 + \frac{1}{6}P_0l^3 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3 + \frac{1}{6}P_2(l - x_2)^3 &= y_3 - y_0, \\ M_0 + P_0l + P_1(l - x_1) + P_2(l - x_2) &= 0.\end{aligned}$$

Wygodnie jest przedstawić go w formie bezwymiarowej:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_0x_1 + \frac{1}{6}P_0x_1^2 &= (y_1 - y_0)/x_1, \\ \frac{1}{2}M_0x_2 + \frac{1}{6}P_0x_2^2 + \frac{1}{6}P_1l^3/x_2 &= (y_2 - y_0)/x_2, \\ \frac{1}{2}M_0l + \frac{1}{6}P_0l^2 + \frac{1}{6}P_1(l - x_1)^3/l + \frac{1}{6}P_2(l - x_2)^3/l &= (y_3 - y_0)/l, \\ M_0l + P_0l^2 + P_1l(l - x_1) + P_2l(l - x_2) &= 0,\end{aligned}$$

gdzie $l_2 = x_2 - x_1$ jest długością drugiego przedziału. Po prawej stronie występują współczynniki kierunkowe siecznych η_1 , η_2 i η_3 , poprowadzonych przez rzędną początkową i daną rzędną. Wprowadzając bezwymiarowe parametry (23.4), układ przyjmie postać:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_0\xi_1 + \frac{1}{6}p_0\xi_1^2 &= \eta_1, \\ \frac{1}{2}m_0\xi_2 + \frac{1}{6}p_0\xi_2^2 + \frac{1}{6}p_1\lambda_2^3/\xi_2 &= \eta_2, \\ \frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{6}p_0 + \frac{1}{6}p_1\alpha_1^3 + \frac{1}{6}p_2\alpha_2^3 &= \eta_3, \\ m_0 + p_0 + p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 &= 0,\end{aligned}\tag{23.25}$$

gdzie $\lambda_2 = l_2/l$ jest bezwymiarową długością drugiego przedziału.

Rozwiązanie układu (23.25) metodą eliminacji zmiennych jest bardzo żmudne. Można by to zrobić, wyznaczając z dwóch ostatnich równań parametry m_0 i p_0 . Podstawiając je do dwóch pierwszych równań, otrzymalibyśmy układ dwóch równań ze względu na p_1 i p_2 . Lepiej jednak jest przejść na przedstawienie układu w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi_1 & \frac{1}{6}\xi_1^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi_2 & \frac{1}{6}\xi_2^2 & \frac{1}{6}\lambda_2^3/\xi_2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\alpha_1^3 & \frac{1}{6}\alpha_2^3 \\ 1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{23.26}$$

Pierwsza macierz jest macierzą współczynników $\mathbf{A}$ w układzie (23.25), druga wektorem niewiadomych $\mathbf{X}(m_0, p_0, p_1, p_2)$, a trzecia kolumną wyrazów wolnych $\mathbf{B}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, 0)$. Rozwiązaniem jest wektor $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, który można uzyskać też wzorami Cramera.

Znając wektor $\mathbf{X}$, równanie krzywej giętkowej i wzór na pole pod nią można przedstawić w kategoriach bezwymiarowych. Postępując podobnie jak poprzednio, równania (23.23) i (23.24) przyjmą postać:

$$y = y_0 + l[\frac{1}{2}m_0\xi^2 + \frac{1}{6}p_0\xi^3|\xi_1 + \frac{1}{6}p_1(\xi - \xi_1)^3|\xi_2 + \frac{1}{6}p_2(\xi - \xi_2)^3],\tag{23.27}$$

gdzie $\xi = x/l$ jest bezwymiarową odciętą:

$$A = y_0 l + l^2 [\frac{1}{6} m_0 + \frac{1}{24} p_0 + \frac{1}{24} p_1 (1 - \xi_1)^4 + \frac{1}{24} p_2 (1 - \xi_2)^4]. \quad (23.28)$$

W przypadku, gdy na końcach krzywej y'' zeruje się, postać krzywej giętkowej oraz pole pod nią wyrażą się analogicznie, jak poprzednio:

$$y = y_0 + l [C\xi + \frac{1}{6} p_0 \xi^3 | \xi_1 + \frac{1}{6} p_1 (\xi - \xi_1)^3 | \xi_2 + \frac{1}{6} p_2 (\xi - \xi_2)^3], \quad (23.29)$$

$$A = y_0 l + l^2 [\frac{1}{2} C + \frac{1}{24} p_0 + \frac{1}{24} p_1 (1 - \xi_1)^4 + \frac{1}{24} p_2 (1 - \xi_2)^4]. \quad (23.30)$$

Parametry w tych wzorach określa układ równań:

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{6} p_0 \xi_1^2 &= \eta_1, \\ C + \frac{1}{6} p_0 \xi_2^2 + \frac{1}{6} p_1 \lambda_2^3 / \xi_2 &= \eta_2, \\ C + \frac{1}{6} p_0 + \frac{1}{6} p_1 \alpha_1^3 + \frac{1}{6} p_2 \alpha_2^3 &= \eta_3, \\ p_0 + p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \quad (23.31)$$

Postać macierzowa układu jest następująca:

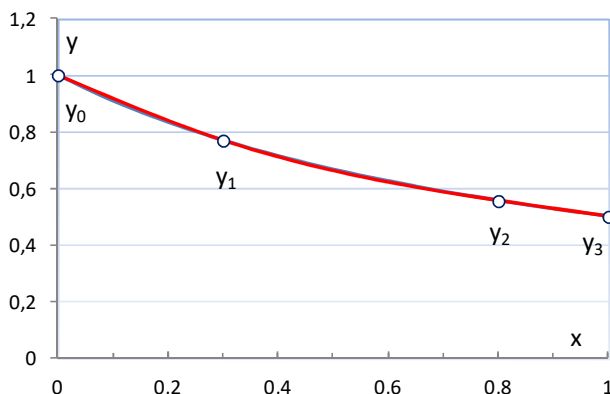
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \xi_1 & \frac{1}{6} \xi_1^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \xi_2 & \frac{1}{6} \xi_2^2 & \frac{1}{6} \lambda_2^3 / \xi_2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \alpha_1^3 & \frac{1}{6} \alpha_2^3 \\ 1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23.32)$$

Rozwiązaniem jest wektor $\mathbf{X}(m_0, p_0, p_1, p_2) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, który można uzyskać też za pomocą wzorów Cramera. Posługiwanie się postacią macierzową jest bardzo wygodne w zastosowaniach.

PRZYKŁAD 25. Obliczyć całkę $\int_0^1 dx/(1+x)$ za pomocą krzywej giętkowej o czterech rzędnych w punktach 0, 0,3, 0,8 i 1.

R o z w i ą z a n i e. Rzędne funkcji w zadanych punktach wynoszą: 1, $^{10}/_{13}$, $^5/_9$ i $1/2$. Rozpiętość krzywej $l = 1$. Bezwymiarowe odcięte $\xi_1 = 0,3$, $\alpha_1 = 0,7$ i $\xi_2 = 0,8$, $\alpha_2 = 0,2$. Współczynniki kierunkowe siecznych wynoszą $\eta_1 = -0,76923$, $\eta_2 = -^5/_9$, $\eta_3 = -0,5$. Parametr $C = -0,83011$, $p_0 = 4,058755$, $p_1 = -6,08169$, $p_2 = 0,99214$. Pole pod krzywą giętkową wynosi $A = 0,69328$, gdy dokładna wartość całki wynosi $\ln 2 = 0,69315$, błąd wynosi zatem 0,00014. Porównanie interpolacji giętkowej z funkcją podcałkową pokazane jest na rys. 34. Jeśli przyjąć $x_1 = 0,29$, a $x_2 = 0,79$, to uzyskamy całkę $A = 0,69315$ z dokładnością pięciu miejsc po przecinku – wynik, jaki trudno osiągnąć innymi metodami w oparciu o cztery rzędne.

Krzywe na rys. 30 i 34 wydają się jednakowo dobrze aproksymować funkcję podcałkową. W takim przypadku wprowadzenie drugiego czy dalszych punktów daje jedynie kosmetyczne zmiany, niewidoczne dla oka, zmniejszające i tak już mały błąd.



Rys. 34. Interpolacji giętkowa czteropunktowa funkcji $1/(1+x)$

Ciekawą własnością krzywych giętkowych jest to, że zwiększenie liczby węzłów nie powoduje falowania krzywej giętkowej, jak to jest w przypadku interpolacji wielomianowej. Dodanie punktów nie zwiększa bowiem stopnia interpolacji giętkowej. Bez względu na liczbę punktów, jest to zawsze krzywa klasy C^2 .

Na początku lat 1970. w przemyśle okrętowym w Polsce podjęto prace nad rozwojem krzywych giętkowych, lecz nie przebiły się one do dydaktyki ani podręczników.

Zadania

1. Pokazać, że współczynnik kierunkowy siecznej poprowadzonej z początku układu przez dowolny punkt (x, y) na linii ugięcia giętki obciążonej momentami na końcach, określony jest wzorem:

$$y/x = C + \frac{1}{2}M_0x + \frac{1}{6}P_0x^2.$$

W formie bezwymiarowej:

$$\eta = C + \frac{1}{2}m_0\xi + \frac{1}{6}p_0\xi^2.$$

W s k a z ó w k a: wykorzystać wzór (23.17).

2. Pokazać, że gdy giętka obciążona jest dodatkowo siłą P_1 w punkcie x_1 , wzór na współczynnik kierunkowy siecznej z zadania 1, ważny jest dla $x \leq x_1$. Mimo takich samych wzorów, współczynniki te są różne dla obydwu przypadków, ze względu na różne rzędne w punkcie x_1 .

§ 24. Obliczanie całek z ominięciem funkcji pierwotnej

W niektórych szczególnych przypadkach całek oznaczonych można uzyskać wynik ścisły, mimo że funkcja pierwotna jest nieelementarną funkcją specjalną, co uniemożliwia zastosowanie wzoru Newtona-Leibnitza (1.1). Podamy kilka najważniejszych przykła-

dów obliczeń takich całek, stosując różne chwytty. Obszerną metodą obliczania wspomnianych całek jest teoria residuów, znana w analizie zmiennej zespolonej, jednak nie będziemy jej tutaj omawiali.

a) Sprowadzanie do całki zależnej od parametru

Jest to bardzo skuteczna metoda. Zaprezentujemy ją na przykładzie obliczenia całki:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Całka jest zbieżna, więc jej wartość istnieje. Funkcja pierwotna całki jest nieelementarna. Aby znaleźć jej ścisłą wartość, obliczmy najpierw całkę zależną od parametru a :

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

przyjmującą poszukiwaną wartość dla $a = 0$. Gdy parametr $a \rightarrow \infty$, funkcja $I(a)$ dąży do zera. Różniczkując ją względem parametru a (różniczkowanie można wykonać pod znakiem całki), otrzymamy:

$$\frac{dI}{da} = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

Stąd na podstawie wzoru (21.7) mamy:

$$\frac{dI}{da} = - \frac{1}{1 + a^2}$$

Zatem całkując, otrzymamy:

$$I(a) = C - \arctg a,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Podstawiając $a = \infty$, otrzymamy:

$$0 = C - \frac{1}{2}\pi.$$

Stąd stała $C = \frac{1}{2}\pi$. Zatem:

$$I(a) = \frac{1}{2}\pi - \arctg a.$$

Przyjmując teraz $a = 0$, otrzymamy ostatecznie, że:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi \quad (24.1)$$

PRZYKŁAD 26. Wiedząc, że:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

gdzie $a > 1$, obliczyć:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)^2}$$

R o z w i ą z a n i e. Mianownik całki I_2 jest kwadratem mianownika całki I_1 . Możemy zatem spodziewać się, że całka I_2 ma związek z pochodną całki I_1 . Różniczkując obustronnie równanie na I_1 względem parametru a , zapisując wpierw prawą stronę w postaci wygodnej do różniczkowania, otrzymamy:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)^2} = 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) (a^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} 2a$$

Stąd:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

b) Podnoszenie całki do kwadratu

W niektórych przypadkach łatwiej jest obliczyć kwadrat całki, niż samą całkę. Dla przykładu obliczmy całkę:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Jest to przypadek, gdy łatwiej daje się obliczyć kwadrat tej całki:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy$$

Wykorzystaliśmy fakt, że oznaczenie zmiennej nie wpływa na wynik całkowania oraz drugi fakt, że iloczyn całek można zamienić na całkę podwójną. W całce podwójnej przechodzimy na układ biegunowy:

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr$$

gdzie całkę podwójną zastąpiliśmy iloczynem dwóch niezależnych całek. Pierwsza całka równa się $\frac{1}{2}\pi$, a druga jest łatwa do obliczenia przez podstawienie $t = \frac{1}{2}r^2$. Otrzymamy, że jest równa 1. Stąd:

$$I^2 = \frac{1}{2}\pi.$$

Zatem:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (24.2)$$

oraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi} \quad (24.3)$$

Ta ostatnia całka, zwana całką Gaussa, ma duże znaczenie przy badaniu zmiennych losowych o rozkładzie normalnym.

c) Sprowadzanie do równania

Obliczmy całkę:

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

Funkcja pierwotna jest nieelementarna. Całka ta jest niewłaściwa, lecz jest zbieżna. W celu jej obliczenia zastosujemy podstawienie $x = 2t$. Wówczas:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = 2 \int_0^{\pi/4} \ln(2 \sin t \cos t) dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2}\pi \ln 2 + 2 \left[\int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt \right]. \end{aligned}$$

Funkcja sinus i kosinus są symetryczne względem $\frac{1}{4}\pi$. W związku z tym, całka $\ln \cos t$ w przedziale $\langle 0, \frac{1}{4}\pi \rangle$ jest taka sama, jak całka $\ln \sin t$ w przedziale $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Zatem całki w nawiasie kwadratowym równe są całce wyjściowej. Stąd otrzymujemy równanie na obliczenie całki I :

$$I = \frac{1}{2}\pi \ln 2 + 2I,$$

z którego wynika, że $I = -\frac{1}{2}\pi \ln 2$. Zatem:

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = -\frac{1}{2}\pi \ln 2. \quad (24.4)$$

d) Całki Froullaniego

Jest wiele całek niewłaściwych szczególnego typu

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

gdzie $a, b > 0$, zwanych całkami *Froullaniego*. Całki takie daje się obliczyć bez konieczności znajdowania funkcji pierwotnych. W tym celu trzeba najpierw przekształcić całkę obciętą, rozbijając ją na różnicę dwóch całek i stosując oczywiste podstawienia:

$$\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(x)}{x} dx$$

Granice całkowania w obydwu całkach można rozbić na dwa podprzedziały:

$$\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{b\delta}^{a\Delta} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{a\Delta} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(x)}{x} dx$$

Dwie całki środkowe znoszą się. Mamy więc tożsamość:

$$\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(x)}{x} dx$$

W granicy, gdy $\delta \rightarrow 0$, a $\Delta \rightarrow \infty$ pierwsza całka jest tożsama z naszą całką. Widzimy, że wartość całki zależy wyłącznie od zachowania się funkcji podcałkowej w otoczeniu zera i w nieskończoności. Stosując do dwóch ostatnich całek twierdzenie o wartości średniej, otrzymamy:

$$\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(x)}{x} dx = f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dx}{x} = f(\xi) \ln \frac{b}{a}$$

gdzie ξ jest z przedziału $\langle a\delta, b\delta \rangle$. Analogicznie:

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(x)}{x} dx = f(\eta) \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{dx}{x} = f(\eta) \ln \frac{b}{a}$$

gdzie η jest z przedziału $\langle a\Delta, b\Delta \rangle$. W granicy, gdy $\delta \rightarrow 0$, a $\Delta \rightarrow \infty$, otrzymamy wzór:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f_0 - f_{\infty}) \ln \frac{b}{a} \quad (24.5)$$

jako że punkt ξ dąży wówczas do zera, a η do nieskończoności. Gdy w nieskończoności funkcja $f(x)$ oscyluje, to za f_{∞} należy przyjąć średnią wartość tych oscylacji.

Zadania

1. Stosując oczywiste podstawienie pokazać, że całka poniższa nie zależy od parametru a :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Konsekwencją jest zerowanie się poniższej całki, zgodne też ze wzorem (24.5):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx = 0$$

2. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos bx \, dx$$

R o z w i ą z a n i e. Całka jest funkcją parametrów a i b . By uzyskać znaną postać, scałkujemy ją stronami względem jednego z parametrów, np. parametru a . Otrzymamy:

$$J(a) = - \int_0^{\infty} x \frac{e^{-ax}}{x} \cos bx \, dx = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = - \frac{a}{a^2 + b^2}$$

gdzie wykorzystaliśmy wzór (21.7). Ponieważ $I = \partial J \partial a$, stąd:

$$I = - \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) = - \frac{a^2 + b^2 - 2a^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

Całka I jest funkcją dwóch parametrów. Ten sam wynik otrzymalibyśmy, całkując względem parametru b i różniczkując otrzymane wyrażenie względem tegoż parametru.

3. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{1 - \cos bx}{x} dx$$

W s k a z ó w k a: zróżniczkować stronami względem jednego z parametrów, a następnie scałkować względem tegoż parametru.

O d p o w i e d ź:

$$I = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)$$

4. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x \, dx$$

W s k a z ó w k a: wprowadzić parametr do eksponentu lub kosinusa i rozpatrzyć ogólniejszą całkę. O d p o w i e d ź: $I = \ln \sqrt{2}$.

5. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

R o z w i ą z a n i e. Ze wzoru (24.5) natychmiast mamy: $I = \ln(b/a)$.

6. Obliczyć całkę z zadania 5 metodą różniczkowania względem jednego z parametrów.

R o z w i ą z a n i e. Różniczkując stronami względem parametru a , otrzymamy:

$$\partial I / \partial a = - \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = -1/a.$$

Całkując stronami względem parametru a , otrzymamy:

$$I = C - \ln a.$$

Stałą C wyznaczmy, jeśli będziemy znali wartość całki I dla jakiegoś parametru a . Nietrudno zauważyć, że gdy $a = b$, to $I = 0$. Tak więc:

$$0 = C - \ln b.$$

Stąd $C = \ln b$. Zatem:

$$I = \ln b - \ln a = \ln(b/a),$$

jak w zadaniu 5.

7. Korzystając z całki I_2 , podanej w przykładzie 26 na s. 149, obliczyć:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)^3}$$

W s k a z ó w k a: zróżniczkować stronami równanie na I_2 względem parametru a .
O d p o w i e d ź:

$$I_3 = \frac{-\pi}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\pi a^2}{(a^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}$$

8. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\arctg ax - \arctg bx}{x} dx$$

R o z w i ą z a n i e. Ze wzoru (24.5) natychmiast mamy: $I = -\frac{1}{2}\pi \ln(b/a)$.

9. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$$

O d p o w i e d ź: $I = \ln(b/a)$.

10. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$

W s k a z ó w k a: zróżniczkować całkę względem jednego z parametrów, a następnie scałkować względem tegoż parametru.

O d p o w i e d ź: $I = \frac{1}{2}\pi(b - a)$.

11. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} \ln \frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} \frac{dx}{x}$$

W s k a z ó w k a: logarytm ilorazu zastąpić różnicą logarytmów. Wówczas funkcja podcałkowa przyjmie postać, jak we wzorach Froullaniego.

O d p o w i e d ź: $I = q \ln(b/a)$.

12. Wykazać, że:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{a \sin bx - b \sin ax}{x^2} dx = ab \ln \frac{a}{b}$$

R o z w i ą z a n i e. Musimy najpierw doprowadzić całkę do znanej postaci. Różniczkując ją względem parametru a , otrzymamy:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx - b x \cos ax}{x^2} dx$$

Całkę tę musimy jeszcze raz zróżniczkować cząstkowo względem parametru b :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial b \partial a} = \int_0^{\infty} \frac{x \cos bx - x \cos ax}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x} dx$$

A tę całkę znamy, równa się $\ln(a/b)$ – patrz zadanie 9 i wzór (24.5). Tak więc:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial b \partial a} = \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Całkując to równanie względem parametru b , otrzymamy:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = b \ln a - b(\ln b - 1)$$

Uwzględniliśmy tu, że całka nieoznaczona $\ln x$ równa się $x(\ln x - 1)$. Stała całkowania $C = 0$ zeruje się, bowiem całka na $\partial I / \partial a$ zeruje się, gdy $b = 0$. Całkując powyższy związek względem parametru a , otrzymamy:

$$I = ba(\ln a - 1) - ab(\ln b - 1) = ab \ln(a/b), \quad \text{c.b.d.o.}$$

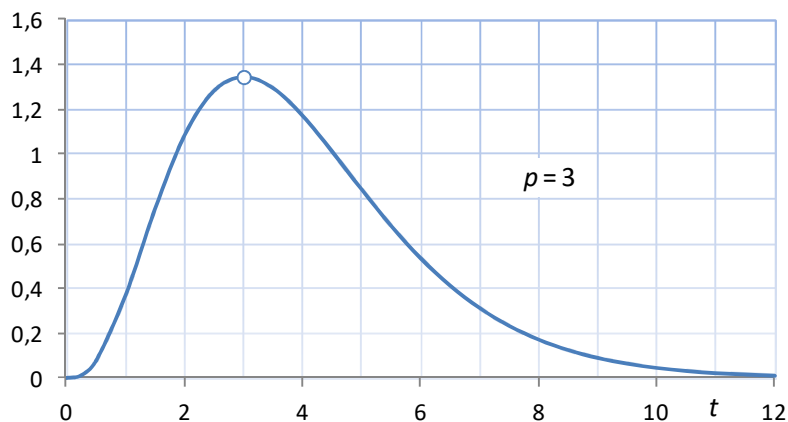
Stała całkowania $C = 0$ zeruje się, bowiem całka I zeruje się, gdy $a = 0$.

§ 25. Całkowanie jednomianu tłumionego

W zastosowaniach spotyka się całkowanie jednomianu tłumionego:

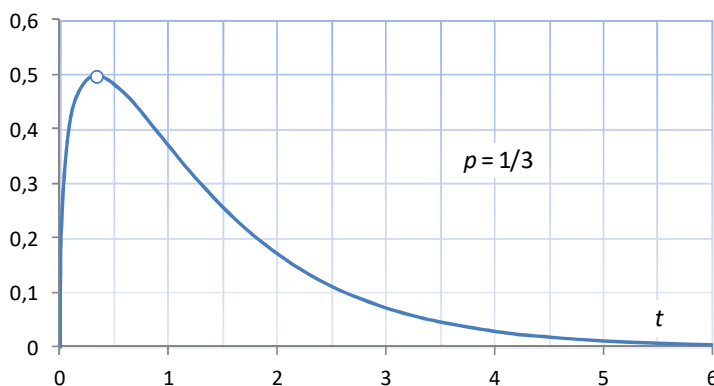
$$\int t^p e^{-t} dt$$

gdzie p jest wykładnikiem jednomianu. Całka ta ma duże znaczenie w zastosowaniach. Wykres funkcji podcałkowej dla wykładnika $p = 3$ pokazany jest na rys. 35.



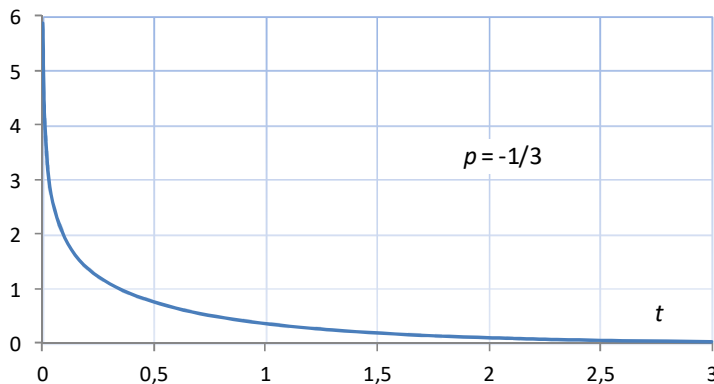
Rys. 35. Wykres funkcji podcałkowej dla $p = 3$

Wykres dla wykładnika $p = \frac{1}{3}$ pokazany jest na rys. 36, a dla wykładnika $p = -\frac{1}{3}$ na rys. 37. Dla $p > 1$ są to potęgi, dla $p \in (0, 1)$ – pierwiastki, a dla $p \in (-1, 0)$ są to odwrotności pierwiastków.



Rys. 36. Wykres funkcji podcałkowej dla $p = \frac{1}{3}$

Można pokazać, że dla dodatnich wykładników p maksimum funkcji podcałkowej wypada dla $t = p$ i równe jest $p^p e^{-p}$ (rys. 35 i 36). Dla $p \in (-1, 0)$ funkcja podcałkowa monotonicznie opada w sposób pokazany na rys. 37.



Rys. 37. Wykres funkcji podcałkowej dla $p = -1/3$

Całkowanie odbywa się najczęściej w przedziale nieskończonym od 0 do ∞ , co daje nową funkcję, zależną od wykładnika p , zwaną *funkcją gamma* Γ . Przyjęto się oznaczać argument tej funkcji większy o 1 od wykładnika jednomianu p . Zatem:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (25.1)$$

gdzie $p = x - 1$. Tak więc argumenty funkcji gamma z przedziału $(0, 1)$ obejmują tłumienie odwrotności pierwiastków, z przedziału $(1, 2)$ – tłumienie pierwiastków, zaś argumenty powyżej 2 dotyczą tłumionych potęg.

Całkując wzór (25.1) przez części, otrzymamy:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

co prowadzi do wzoru rekurencyjnego:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(1+x).$$

Zważywszy, że $\Gamma(1) = 1 = 0!$, co wynika z bezpośredniego całkowania funkcji e^{-t} , ze wzoru rekurencyjnego otrzymamy:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

ogólnie:

$$\Gamma(1+n) = n!$$

Widzimy, że gdy wykładnik p jest naturalny, całka (25.1) równa się $p!$ W dowolnym przypadku $x! \equiv \Gamma(1+x)$. Funkcja dostępna jest w kalkulatorach naukowych.

Funkcja Γ , dana wzorem (25.1), jest więc uogólnieniem pojęcia silni na liczby niecałkowite. Obliczanie wartości Γ dla dowolnych liczb jest jednak trudne, bo nie istnieją wzory analityczne, a całkowanie numeryczne wzoru (25.1) nie wchodzi w grę, bo jest mało dokładne. Wartości funkcji dla argumentów niecałkowitych można określić w oparciu o jej własności.

Funkcja Γ ma szereg własności, m.in. własność odbicia (dowód w zadaniu 2):

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{\pi}{\sin \pi(1-x)} \quad (25.2)$$

Wzór ważny jest dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$, czyli dla przypadku tłumienia odwrotności pierwiastków, jak na rys. 37. Podstawiając $x = 1/2$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Gamma^2(1/2) &= \pi, \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Wartość $\Gamma(1/2)$ można uzyskać też ze wzoru (24.2). Podstawiając $t = 1/2 x^2$ uzyskamy natychmiast, że:

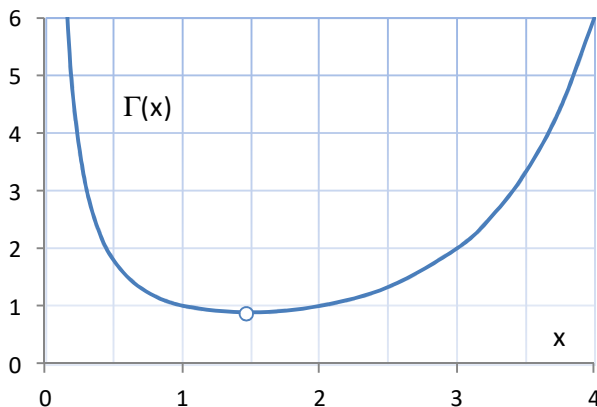
$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$$

Korzystając ze wzoru rekurencyjnego, otrzymamy wartości funkcji Γ dla kolejnych liczb połówkowych. Przykładowo:

$$\begin{aligned} \Gamma(1,5) &= 1/2 \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(2,5) &= 1,5 \cdot \Gamma(1,5) = 1,5 \cdot 1/2 \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(3,5) &= 2,5 \cdot \Gamma(2,5) = 2,5 \cdot 1,5 \cdot 1/2 \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(4,5) &= 3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot 1/2 \sqrt{\pi} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Wartości funkcji gamma znamy więc dla liczb naturalnych i połówkowych. Wartości dla liczb dziesiętnych są niczym innym, jak wartościami *interpolacyjnymi* krzywej przechodzącej przez te punkty. Interpolacja nie zapewnia jednak dokładności oczekiwanej w matematyce. Przebieg funkcji Γ pokazany jest na rys. 38. Minimum lokalne równe $\Gamma_{min} = 0,885603\dots$, funkcja osiąga w punkcie $x_{min} = 1,461632\dots$ Wartości Γ dla liczb dziesiętnych można obliczyć, stosując wzór Stirlinga:

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51\,840x^3} - \frac{571}{2\,488\,320x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right]$$

Rys. 38. Wykres funkcji $\Gamma(x)$

lub aproksymując funkcję w przedziale dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Wzór Stirlinga jest wyrażeniem asymptotycznym, które wraz ze wzorem rekurencyjnym pozwala obliczyć wartości liczbowe Γ dla dowolnych argumentów. Wystarczy stalicować funkcję Γ w przedziale wyznaczonym przez dwie kolejne liczby naturalne. Dla $x \in \langle 1, 2 \rangle$ wartości Γ zostały obliczone tą metodą przez Legendre'a z dokładnością do 12 miejsc po przecinku.

W przypadku interpolacji musimy znaleźć krzywą przechodzącą przez punkty krańcowe i punkt połówkowy. Dla podniesienia dokładności, krzywa interpolacyjna na krańcach musi mieć zadane nachylenie (pochodne) i krzywiznę (II pochodną). Do tego celu można użyć wielomianu aproksymacyjnego. Obecnie wartości funkcji Γ można znaleźć za pomocą programów komputerowych dostępnych w Internecie, np. <https://pl.number-empire.com/gammafunctioncalculator.php>. Funkcja dostępna jest też w nowszych wersjach Excela, od Excela 2013 oraz w kalkulatorach naukowych, jako $x! \equiv \Gamma(1+x)$.

Do aproksymacji funkcji potrzebne są jej pochodne. Otrzymuje się je, różniczkując wzór (25.1). Pamiętając, że $(a^x)' = a^x \ln a$, otrzymamy:

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt$$

W punkcie $x = 1$ pochodna wynosi:

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} \ln t \cdot e^{-t} dt = -\gamma$$

gdzie $\gamma = 0,57721566490153\dots$ jest stałą Eulera, równą różnicy sumy odwrotności liczb naturalnych od 1 do m i $\ln m$, gdy $m \rightarrow \infty$. W kolejnych punktach naturalnych pochodną znajdziemy z pomocą wzoru rekurencyjnego. Różniczkując go, otrzymamy:

$$\Gamma'(1+x) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x),$$

Stąd pochodne funkcji Γ dla kolejnych liczb naturalnych wynoszą:

$$\begin{aligned}\Gamma'(2) &= \Gamma(1) + 1 \cdot \Gamma'(1) = 1 - \gamma, \\ \Gamma'(3) &= \Gamma(2) + 2 \cdot \Gamma'(2) = 3 - 2\gamma, \\ \Gamma'(4) &= \Gamma(3) + 3 \cdot \Gamma'(3) = 11 - 6\gamma, \\ \Gamma'(5) &= \Gamma(4) + 4 \cdot \Gamma'(4) = 50 - 24\gamma \text{ itd.}\end{aligned}$$

Wzór na II pochodną funkcji $\Gamma(x)$ otrzymamy, różniczkując $\Gamma'(x)$:

$$\Gamma''(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} (\ln t)^2 e^{-t} dt$$

W punkcie $x = 1$ druga pochodna wynosi:

$$\Gamma''(1) = \int_0^{\infty} (\ln t)^2 e^{-t} dt = \gamma^2 + \frac{1}{6}\pi^2$$

W kolejnych punktach naturalnych pochodną znajdziemy z pomocą wzoru rekurencyjnego. Różniczkując pierwszą pochodną, otrzymamy:

$$\Gamma''(1+x) = 2\Gamma'(x) + x\Gamma''(x).$$

Stąd drugie pochodne funkcji Γ dla kolejnych liczb naturalnych wynoszą:

$$\begin{aligned}\Gamma''(2) &= 2\Gamma'(1) + 1 \cdot \Gamma''(1) = -2\gamma + \gamma^2 + \frac{1}{6}\pi^2, \\ \Gamma''(3) &= 2\Gamma'(2) + 2 \cdot \Gamma''(2), \\ \Gamma''(4) &= 2\Gamma'(3) + 3 \cdot \Gamma''(3) \text{ itd.}\end{aligned}$$

Do interpolacji funkcji Γ między dwoma kolejnymi liczbami naturalnymi słabo nadają się krzywe giętkowe, bo wewnątrz przedziału mamy tylko jeden punkt (połówkowy). Musimy więc zastosować wielomian aproksymacyjny. Żądając, by krzywa przechodziła przez punkty końcowe i punkt połówkowy, a na końcach miała zadane I i II pochodną, mamy 7 warunków, co pozwala znaleźć wielomian aproksymacyjny szóstego stopnia: Przyjęło się aproksymować funkcję $\Gamma(1+x)$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Zatem:

$$\Gamma(1+x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6. \quad (25.3)$$

Wielomian aproksymacyjny $\Gamma(1+x)$ przedstawia jednocześnie funkcję $\Gamma(x)$, jeśli w rozwinięciu zmienną x zastąpić przez $x-1$. Podstawienie takie przesuwając wykres (25.3) w prawo o 1.

Musimy narzucić sześć warunków na wielomian aproksymacyjny. Mianowicie:

$$\Gamma'(1) = -\gamma, \quad \Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{1}{6}\pi^2,$$

$$\begin{aligned}\Gamma(1,5) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma'(2) &= 1 - \gamma, & \Gamma''(2) &= -2\gamma + \gamma^2 + \frac{1}{6}\pi^2.\end{aligned}$$

Prowadzą one do układu równań z sześcioma współczynnikami $a_1, \dots, a_6$. Równania na współczynniki $\Gamma(1+x)$ są następujące:

$$\begin{aligned}a_1 &= -\gamma, \\ 2a_2 &= \gamma^2 + \frac{1}{6}\pi^2, \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{16}a_4 + \frac{1}{32}a_5 + \frac{1}{64}x^6 &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - 1, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= 0, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 &= 1 - \gamma, \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 + 30a_6 &= -2\gamma + \gamma^2 + \frac{1}{6}\pi^2.\end{aligned}$$

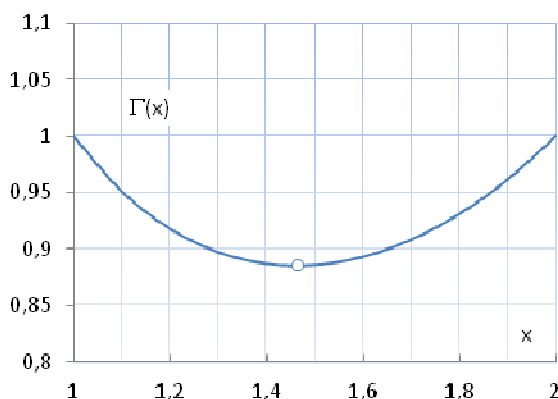
Ponieważ dwa pierwsze współczynniki dane są wprost, układ sześciu równań redukuje się do czterech:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{16}a_4 + \frac{1}{32}a_5 + \frac{1}{64}x^6 &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - 1 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}a_2, \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= \gamma - a_2, \\ 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 &= 1 - 2a_2, \\ 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 + 30a_6 &= -2\gamma.\end{aligned}$$

Z rozwiązania układu otrzymamy:

$$\begin{aligned}a_1 &= -0,5772156649015, & a_4 &= 0,73506061920501 \\ a_2 &= 0,98905599532797, & a_5 &= -0,36372994308930 \\ a_3 &= -0,86644042907446, & a_6 &= 0,08326942253232.\end{aligned}$$

Wykres aproksymacji wielomianowej $\Gamma(x)$ w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ wg wzoru (25.3) pokazany jest na rys. 39.



Rys. 39. Aproksymacja wielomianowa funkcji $\Gamma(x)$ w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$

Błąd aproksymacji $|\epsilon(x)| < 0,00012$, czyli aproksymacja jest praktycznie dokładna do czwartego miejsca dziesiętnego. Z uwagi na błąd, współczynniki aproksymacji można zaokrąglić do pięciu miejsc po przecinku.

Znając wartości $\Gamma(x)$ w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$, łatwo można znaleźć wartości funkcji dla dowolnego argumentu spoza tego przedziału, stosując sukcesywnie wzór rekurencyjny. Przykładowo:

$$\Gamma(4,27) = 3,27 \cdot \Gamma(3,27) = 3,27 \cdot 2,27 \cdot 1,27 \cdot \Gamma(1,27). \quad (25.4)$$

W zastosowaniach bywa potrzebna także *niezupełna* funkcja gamma, dolna i górna:

$$\int_0^s t^x \exp(-t) dt$$

$$\int_s^\infty t^x \exp(-t) dt.$$

Suma obydwu całek równa się $\Gamma(1+x)$, jeśli mają tę samą granicę rozdziału.

Gdy wykładnik jednomianu jest liczbą dziesiętną, wartości niezupełnej funkcji Γ można znaleźć za pomocą programów komputerowych dostępnych w Internecie, jak na przykład <https://pl.numberempire.com/definiteintegralcalculator.php>. Wystarczy wpisać funkcję podcałkową, podać granice całkowania, by otrzymać (momentalnie) wynik o dużej dokładności.

Gdy wykładnik jednomianu jest liczbą naturalną, niezupełne funkcje gamma można obliczyć ściśle. Przykładowo, stosując sukcesywnie całkowanie przez części, otrzymamy:

$$\int_x^\infty t^3 e^{-t} dt = e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$$

$$\int_0^x t^5 e^{-t} dt = 120 - e^{-x}(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120)$$

W nawiasie okrągłym występuje n -ta pochodna jednomianu x^n .

Zadania

1. Wyprowadzić wzór rekurencyjny dla funkcji Γ , biorąc za punkt wyjścia pojęcie silni.

R o z w i ą z a n i e. $n! = (n-1)! \cdot n$. Ale $n! = \Gamma(n+1)$, $(n-1)! = \Gamma(n)$, zatem:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n).$$

2. Udowodnić własność odbicia funkcji gamma, daną wzorem (25.2).

R o z w i ą z a n i e. Dla wygody zmienimy oznaczenie zmiennej x na p . Mamy udowodnić, że $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi/\sin p\pi$. Iloczyn funkcji gamma wyrazimy za pomocą kąta fazowego.

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{-p} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} \left(\frac{x}{y}\right)^p x^{-1} dx dy$$

Wykorzystaliśmy fakt, że oznaczenie zmiennej nie wpływa na wynik oraz że iloczyn całek można zamienić na całkę podwójną, w której przechodzimy na układ biegunowy:

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^p \theta \frac{d\theta}{\cos \theta} \int_0^\infty e^{-r(\cos \theta + \sin \theta)} dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{ctg}^p \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg}^p \theta (1 + \operatorname{tg} \theta)} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}\end{aligned}$$

Stosując podstawienie $t = \operatorname{tg} \theta$, otrzymamy znaną całkę:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^\infty \frac{dt}{t^p(1+t)} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{c. b. d. o.}$$

Uzyskuje się ją za pomocą teorii residuum. Poprawność wzoru można sprawdzić kalkulatorem internetowym dla wybranych parametrów p . Pamiętajmy, że $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Przykładowo, dla $p = 1/3$ otrzymamy:

$$\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[3]{t}(1+t)} = 3.6275\,9872\,84\dots = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Wynik nie zmienia się, jeśli wykładnik potęgi w całce zmienimy na $2/3$.

3. Pokazać, że zamiana x na $(1/2 - x)$ we wzorze na odbicie prowadzi do wzoru:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}$$

4. Udowodnić własność odbicia funkcji gamma w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ w oparciu o wzór rekurencyjny:

$$\Gamma(1+x)\Gamma(2-x) = x(1-x) \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Sprawdzenie numeryczne. Przykładowo, dla $x = 1/6$ mamy:

$$\Gamma(1\frac{1}{6}) \cdot \Gamma(1\frac{5}{6}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{1}{6}\pi} = \frac{5}{18} \pi$$

Wartość numeryczna z kalkulatora wynosi: $0,872664625997\dots$,

natomiast wartość analityczna $\frac{5}{18}\pi$ równa się $0,872664625997\dots$ Wzór jest ścisły.

5. Znając przebieg funkcji $\Gamma(x)$ w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$, znaleźć jej przebieg w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

R o z w i ą z a n i e. Korzystamy ze wzoru rekurencyjnego: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Stąd:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(1+x)$$

gdzie funkcja $\Gamma(1+x)$ dana jest wzorem (25.3). W dostatecznie bliskim sąsiedztwie zera funkcja $\Gamma(x)$ ma więc przebieg hiperboliczny:

$$\Gamma(x) \approx a_1 + 1/x,$$

co widać na rys. 38.

6. Znaleźć przebieg funkcji $\Gamma(x)$ w przedziale $\langle 2, 3 \rangle$ i $\langle 3, 4 \rangle$ na podstawie przebiegu w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$.

R o z w i ą z a n i e. Korzystając ze wzoru rekurencyjnego, otrzymamy

$$\begin{aligned}\Gamma(2+x) &= (1+x)\Gamma(1+x), \\ \Gamma(3+x) &= (2+x)(1+x)\Gamma(1+x) \text{ itd.},\end{aligned}$$

gdzie funkcja $\Gamma(1+x)$ dana jest wzorem (25.3).

7. Obliczyć całkę:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

R o z w i ą z a n i e. Wiemy, że całka ta równa się $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Chcemy jednak obliczyć ją niezależnie, nie korzystając z własności funkcji gamma, ani nie przekształcając wzoru (24.2). Całki tej nie da się obliczyć metodą szkolną, gdyż nie istnieje elementarna funkcja pierwotna. Musimy więc odwołać się do metod specjalnych, omawianych w § 24, jak podniesienie do kwadratu:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x+y)}}{\sqrt{xy}} dx dy$$

Wykorzystaliśmy fakt, że oznaczenie zmiennej nie wpływa na wynik oraz że iloczyn całek można zamienić na całkę podwójną. Dziedziną całkowania jest I ćwiartka układu współrzędnych. Warto zauważyć, że funkcja podcałkowa jest symetryczna względem fazy $\theta = 45^\circ$, bowiem zamiana x z y niczego nie zmienia.

Przechodząc na układ biegunowy, otrzymamy:

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-r(\cos \theta + \sin \theta)}}{r \sqrt{\cos \theta \sin \theta}} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}} \int_0^{\infty} e^{-r(\cos \theta + \sin \theta)} dr$$

gdzie całkę podwójną zastąpiliśmy iloczynem całek iterowanych. W drugiej całce, wyrażenie w nawiasie nie zależy od r . Oznaczmy je przez a . Całka taka jest równa $1/a$. Otrzymamy zatem jedną całkę zależną od fazy:

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos \theta + \sin \theta) \sqrt{\cos \theta \sin \theta}}$$

gdzie $I^2 = \Gamma^2(1/2)$. Wykres funkcji podcałkowej pokazany jest na rys. 15. Jak można było oczekiwać, jest on symetryczny względem $\theta = 45^\circ$. Na krańcach przedziału całkowania posiada asymptoty pionowe.

Mimo osobliwości, całkę powyższą można obliczyć analitycznie, bez uciekania się do funkcji pierwotnej, korzystając z wyników zadania 2. Mianowicie:

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos \theta + \sin \theta) \sqrt{\cos \theta \sin \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta / \cos^2 \theta}{(1 + \operatorname{tg} \theta) \sqrt{\operatorname{tg} \theta}}$$

Stosując podstawienie $t = \operatorname{tg} \theta$, otrzymamy znaną całkę:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t) \sqrt{t}} = \frac{\pi}{\sin \frac{1}{2}\pi} = \pi$$

8. Wyrazić kwadrat funkcji gamma:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

za pomocą całkowania względem kąta fazowego θ .

R o z w i ą z a n i e.

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y} y^{p-1} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} (xy)^{p-1} dx dy$$

Iloczyn całek można zamienić na całkę podwójną. Dziedziną całkowania jest I ćwiartka układu współrzędnych. Przechodząc na układ biegunowy, otrzymamy:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r(\cos \theta + \sin \theta)} (r^2 \cos \theta \sin \theta)^{p-1} r dr d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \sin \theta)^{p-1} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r(\cos \theta + \sin \theta)} r^{2p-1} dr = \end{aligned}$$

Problemem jest obliczenie drugiej całki. Oznaczmy przez a wyrażenie w nawiasie i zastosujmy podstawienie $x = ar$. Otrzymamy:

$$\int_0^{\infty} e^{-ar} r^{2p-1} dr = \frac{1}{a^{2p}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^b dx = \frac{1}{a^{2p}} \Gamma(2p)$$

gdzie $a = \cos \theta + \sin \theta$, zaś $b = 2p - 1$. Zatem:

$$I^2 = \Gamma(2p) \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos \theta \sin \theta)^{p-1}}{(\cos \theta + \sin \theta)^{2p}} d\theta = \Gamma(2p) \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^{p-1} \theta}{(1 + \operatorname{tg} \theta)^{2p}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Podstawiając $t = \operatorname{tg} \theta$, otrzymamy:

$$I^2 = \Gamma(2p) \int_0^{\pi/2} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{2p}} dt$$

Problemem jest obliczenie całki osobliwej. W matematyce znana jest całka:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+qt)^{p+r}} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r)}{q^p\Gamma(p+r)}$$

gdzie p, q i r są dodatnie. Całkę tę uzyskuje się za pomocą teorii residuum. W naszym przypadku $r = p, q = 1$. Zatem:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{2p}} dt = \frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$$

Tak więc $I = \Gamma(p)$. Otrzymaliśmy wynik oczywisty, potwierdzający jedynie, że wyrażenie na całkę osobliwą jest ściśle.

Gdybyśmy znali wartość całki po lewej z obliczeń numerycznych, moglibyśmy wyznaczyć $\Gamma(p)$ czy $\Gamma(2p)$. Ta droga wyznaczania wartości funkcji gamma jest jednak mało efektywna. Wzór powyższy jest przydatny raczej do sprawdzania dokładności kalkulatora internetowego. Sprawdźmy więc jego dokładność dla $p = \frac{2}{3}$. Kalkulator daje wynik: 2,053390217939... Natomiast wartość analityczna $\Gamma^2(\frac{2}{3})/\Gamma(4/3)$ równa się 2,053390217939... Widzimy, numeryczne obliczenie całki przez kalkulator internetowy jest zgodne z analitycznym.

W przypadku, gdy argument funkcji Γ nie jest całkowity ani połówkowy, obliczenia wartości funkcji przeprowadzamy, korzystając ze wzoru rekurencyjnego, jak w zadaniu 4 i 6 czy we wzorze (25.4), w oparciu o wartości z przedziału $\langle 1, 2 \rangle$.

9. Udowodnić, że funkcja podcałkowa we wzorze na $\Gamma^2(p)$ jest symetryczna względem fazy $\theta = 45^\circ$, a co za tym idzie, że:

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{2p}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{2p}} dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$$

czyli że całka od 0 do 1 jest połową całki od 0 do ∞ .

W s k a z ó w k a : pokazać, że funkcja podcałkowa w całce podwójnej na $\Gamma^2(p)$ jest symetryczna względem fazy $\theta = 45^\circ$.

DODATEK MATEMATYCZNY

§ 26. Własności wielomianów Legendre'a

Wielomiany ortogonalne mają liczne zastosowania w obliczeniach numerycznych i fizyce teoretycznej. Stanowią ciąg wielomianów, które spełniają następującą relację:

$$\int_a^b \theta(x) G_m(x) G_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (26.1)$$

gdzie $\theta(x)$ jest funkcją wagową. Ciągi wielomianów ortogonalnych zależą od wyboru przedziału $\langle a, b \rangle$ i funkcji wagowej. Omówimy wielomiany Legendre'a $P(x)$, Laguerre'a $L(x)$, i Hermite'a $H(x)$. Wielomiany Czebyszewa $T(x)$ i $U(x)$, najłatwiejsze z nich, zostały omówione wcześniej.

Wielomiany ortogonalne można omawiać na wiele sposobów. Za punkt wyjścia przyjmiemy tzw. *funkcję tworzącą* $V(x, t)$, gdzie t jest zmienną pomocniczą, zaś x odgrywa rolę parametru. Każdy rodzaj wielomianów ma swoją funkcję tworzącą. Funkcja ta rozwija się w szereg potęgowy:

$$V = \sum_0^\infty G_n(x) t^n. \quad (26.2)$$

Gdyby V było funkcją tylko jednej zmiennej, współczynniki rozwinięcia byłyby stałymi (liczbami). Ponieważ występuje parametr x , współczynniki G_n zależą od tego parametru, czyli są funkcją x . Współczynniki rozwinięcia funkcji tworzącej V są właśnie wielomianami ortogonalnymi, zależnymi od funkcji tworzącej $V(x, t)$. Rozwinięcie (26.2) służy przede wszystkim do badania własności wielomianów ortogonalnych. Same wielomiany nie są konieczne, dopóki nie chcemy znajdować miejsc zerowych czy obliczać wartości wielomianu.

W przypadku wielomianów Legendre'a, odkrytych w 1782 roku, funkcją wagową $\theta = 1$, zaś funkcją tworzącą jest:

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

która rozwija się w szereg potęgowy:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^\infty P_n(x) t^n. \quad (26.3)$$

Biorąc liniowe rozwinięcia funkcji tworzącej (patrz § 29):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \approx 1 + xt,$$

widzimy, że dwa pierwsze jednomiany Legendre'a to $P_0 = 1$ i $P_1 = x$.

Rozwinięcie (17.6) ma sens, gdy funkcja podpierwiastkowa jest dodatnia, co ma miejsce, gdy parametr $x \in \langle -1, 1 \rangle$ – patrz zadanie 1.

a) Wzory rekurencyjne

Wielomiany Legendre'a mają mnóstwo własności i liczne zastosowania. By uzyskać niektóre własności, zróżniczkujemy dwukrotnie rozwinięcie (17.6), raz względem zmiennej t , a drugi raz względem parametru x . Różniczkując względem t , otrzymamy:

$$\frac{t-x}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Korzystając z rozwinięcia (17.6) na funkcję V , otrzymamy:

$$(t-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Przyrównując wyrazy przy t^n , otrzymamy:

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0, \quad (26.4)$$

wzór wiążący trzy wielomiany Legendre'a kolejnych stopni. Tak więc znając dwa pierwsze wielomiany $P_0 = 1$ i $P_1 = x$, można wyznaczyć wszystkie wyższe wielomiany. Ze wzoru wynikają dwie ważne własności:

- jeśli dwie początkowe funkcje są jednomianami, to kolejne funkcje $P_n(x)$ są wielomianami,
- jeśli początkowa funkcja jest parzysta, a następna – nieparzysta, to kolejne wielomiany są na przemian parzyste i nieparzyste. Parzyste dla n parzystych, a nieparzyste dla n nieparzystych, tj. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Różniczkowanie rozwinięcia (17.6) względem parametru x , daje:

$$t \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n.$$

Korzystając z rozwinięcia (17.6), otrzymamy:

$$t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n.$$

Przyrównując wyrazy przy t^n , otrzymamy:

$$P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1} - P_n = 0. \quad (26.5)$$

W oparciu o dwie tożsamości (26.4) i (26.5) chcemy uzyskać wzór na pochodną wielomianów w zależności od samych wielomianów, bez pochodnych innych wielomianów. Różniczkując (26.4) względem x , po uporządkowaniu otrzymamy:

$$(n+1)P'_{n+1} - (2n+1)xP'_n + nP'_{n-1} - (2n+1)P_n = 0. \quad (26.6)$$

Wzory (26.5) i (26.6) tworzą układ równań, z których możemy wyeliminować P'_{n-1} oraz P'_{n+1} . Otrzymamy równania:

$$\begin{aligned} xP'_n - P'_{n-1} &= nP_n, \\ P'_{n+1} - xP'_n &= (n+1)P_n. \end{aligned} \quad (26.7)$$

Dodając je stronami, otrzymamy tożsamość:

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n. \quad (26.8)$$

W drugim równaniu układu (26.7) możemy zmienić wskaźnik n na $n-1$:

$$\begin{aligned} xP'_n - P'_{n-1} &= nP_n, \\ P'_n - xP'_{n-1} &= nP_{n-1}. \end{aligned}$$

Otrzymamy nowy układ, z którego możemy wyeliminować P'_{n-1} . Mnożąc pierwsze równanie układu przez x i odejmując je stronami od siebie, otrzymamy:

$$P'_n(1-x^2) = nP_{n-1} - nxP_n. \quad (26.9)$$

Równanie to wyraża pochodną wielomianu za pomocą dwóch wielomianów.

Wzory powyższe noszą nazwę *wzorów rekurencyjnych*. Najważniejsze z nich to wzór (26.4) i (26.9). Wzór (26.9) nie nadaje się do obliczenia pochodnej w punkcie $x = 1$, ze względu na symbol nieoznaczony $(0/0)$. Zastosowanie reguły de l'Hospitala niewiele daje, bo pojawia się nowa pochodna na końcu. W tym konkretnym przypadku pochodną w $x = 1$ możemy obliczyć sukcesywnie, korzystając ze wzoru rekurencyjnego: $P'_n = n + P'_{n-1}$. Ponieważ $P'_0 = 0$, stąd kolejne pochodne w $x = 1$ wynoszą:

$$\begin{aligned} P'_1 &= 1, & P'_4 &= 10, \\ P'_2 &= 3, & P'_5 &= 15, \\ P'_3 &= 6, & P'_6 &= 21 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Wyniki te łatwo uogólnić: $P'_n(1) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

b) Równanie różniczkowe

Każdy rodzaj wielomianów ortogonalnych jest rozwiązaniem pewnego równania różniczkowego. Można je znaleźć w oparciu o wzory rekurencyjne. Różniczkując wzór (26.9), otrzymamy:

$$[P'_n(1-x^2)]' = nP'_{n-1} - n(xP_n)'$$

Podstawiając za P'_{n-1} wyrażenie, jakie uzyskuje się z pierwszego równania w (26.7), tj. $P'_{n-1} = xP'_n - nP_n$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}[P'_n(1-x^2)]' &= n(xP'_n - nP_n) - n(P_n)', \\ P''_n(1-x^2) - 2xP'_n &= nxP'_n - n^2P_n - nP_n - nxP'_n.\end{aligned}$$

Po uporządkowaniu otrzymamy liniowe równanie różniczkowe II rzędu:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad (26.10)$$

które spełnia funkcja $y \equiv P_n(x)$. Nosi ono nazwę *równania różniczkowego Legendre'a*.

c) Ortogonalność wielomianów Legendre'a

Ortogonalność wielomianów oznacza, że spełniają równanie:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \quad (26.11)$$

Jeśli jeden wskaźnik jest parzysty, a drugi nieparzysty, to wzór powyższy jest oczywisty. Funkcja podcałkowa jest wówczas nieparzysta, a całka takiej funkcji na odcinku $\langle -1, 1 \rangle$ jest tożsamościowo równa zero. Tak naprawdę dowód trzeba przeprowadzić, gdy indeksy obu wielomianów są parzyste lub nieparzyste, bo funkcja podcałkowa jest wówczas parzysta i zerowanie się całki nie jest oczywiste. Dowód jest poniżej.

Jeśli we wzorze (26.11) przyjmiemy $m = 0$, $P_0 = 1$, otrzymamy ciekawy wniosek:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

że całka z wielomianów $P_n(x)$ w przedziale zmienności równa się zero.

Funkcji tworzącej można użyć do obliczenia kwadratu wielomianów $P_n(x)$ w przedziale zmienności. Mianowicie, podnieśmy stronami do kwadratu wzór (17.6):

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} \equiv \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)t^{m+n}.$$

Kwadrat sumy zamieniliśmy na sumę podwójną. Całkując stronami względem x w granicach od -1 do 1 , otrzymamy:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx \right] t^{m+n}.$$

Zakładając, że zachodzi wzór (26.11), suma podwójna zredukuje się do pojedynczej sumy:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_n \left[\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx \right] t^{2n}. \quad (26.12)$$

Całkę po lewej stronie obliczymy przez podstawienie $u = 1 - 2xt + t^2$. Stąd $du = -2tdx$, u zmienia się od $(1+t)^2$ do $(1-t)^2$. Zatem:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} &= \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{du}{u} = \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} = \frac{2}{t} \left(t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \dots \right) = \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}. \end{aligned}$$

Szereg jest zbieżny dla $|t| < 1$. Promień zbieżności w tym przypadku nie gra roli, ważne, że *jakiś* jest. Zauważmy, że w rozwinięciu występują jedynie potęgi $n+n=2n$, nie ma potęg $m+n$, co dowodzi słuszności wzoru (26.11). Przyrównując współczynniki potęg t^{2n} po obydwu stronach wzoru (26.12), otrzymamy:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (26.13)$$

Ciekawe, że obliczyliśmy całki dla całego ciągu funkcji bez ich „dotykania”, jedynie w oparciu o znajomość funkcji tworzącej.

Zadania

1. Znaleźć przedział x , w którym funkcja tworząca wielomianów Legendre'a jest dodatnia.
R o z w i ą z a n i e. Funkcja tworząca jest dodatnia, gdy $1-2xt+t^2 > 0$. Ma to miejsce, gdy parabola znajduje się powyżej osi odciętych, czyli gdy $\Delta < 0$. Wyróżnik równania kwadratowego $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) < 0$. Stąd $(x^2 - 1) < 0$, czyli $x^2 < 1$, co ma miejsce, gdy $|x| < 1$. Zatem funkcja tworząca jest dodatnia, gdy $x \in (-1, 1)$.
2. Znaleźć wartości wielomianów $P_n(x)$ dla wartości krańcowych $x = \pm 1$.
R o z w i ą z a n i e. Dla $x = 1$ funkcja tworząca przyjmie postać:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\dots$$

Rozwija się ona w szereg geometryczny ($q = t$). Współczynniki tego rozwinięcia są wartościami wielomianów w punkcie $x = 1$. Zatem $P_n(1) = 1$.

Dla $x = -1$ funkcja tworząca przyjmie postać (iloraz $q = -t$):

$$\frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = 1-t+t^2 \pm \dots$$

Zatem $P_n(-1) = (-1)^n$.

3. Znaleźć wartości wielomianów $P_n(x)$ w środku przedziału, dla $x = 0$.
R o z w i ą z a n i e. Dla $x = 0$ funkcja tworząca przyjmie postać (patrz § 29):

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 \pm \dots$$

Rozwija się ona w dwumian Newtona o współczynnikach $\binom{-1/2}{n}$. Współczynniki tego rozwinięcia są wartościami wielomianów w punkcie $x = 0$. Zatem wielomiany nieparzyste zerują się w zerze $P_{2n+1}(0) = 0$, natomiast wielomiany parzyste mają wartości:

$$P_{2n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

4. Wiedząc, że $P_0 = 1$ i $P_1 = x$ znaleźć cztery kolejne wielomiany Legendre'a.

O d p o w i e d ź:

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_6 = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

5. Sprawdzić, że współczynnik wiodący przy wyrazie o najwyższej potędze wynosi:

$$a_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$

6. Pokazać, że:

$$(1-x^2)^2 P_n'' = n \{ 2x P_{n-1} - [n+1 - (n-1)x^2] P_n \}.$$

Równanie to wyraża drugą pochodną wielomianu za pomocą dwóch wielomianów. W zerze: $P_n''(0) = -n(n+1)P_n(0)$. W punkcie $x = \pm 1$ wzór jest nieoznaczony.

§ 27. Własności wielomianów Laguerre'a

W przypadku wielomianów Laguerre'a (1834–1886), funkcją wagową $\theta = e^{-x}$, zaś rozważanym przedziałem jest $\langle 0, \infty \rangle$. Funkcją tworzącą jest:

$$V = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t},$$

która rozwija się w szereg potęgowy:

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n. \quad (27.1)$$

Biorąc liniowe rozwinięcia funkcji tworzącej V :

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \approx 1 + (1-x)t,$$

widzimy, że dwa pierwsze jednomiany Laguerre'a to $L_0 = 1$ i $L_1 = 1-x$.

a) Wzory rekurencyjne

By uzyskać wzory rekurencyjne, zróżniczkujemy dwukrotnie rozwinięcie (27.1), raz względem zmiennej t , a drugi raz względem parametru x . Różniczkując względem t , w wyniku żmudnych, lecz prostych działań związanych z różniczkowaniem funkcji tworzącej V , otrzymamy:

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \frac{1-x-t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n-1}.$$

Korzystając z rozwinięcia (27.1) na funkcję tworzącą, otrzymamy:

$$(1-x-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = (1-2t+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n-1}.$$

Przyrównując wyrazy przy t^n po obu stronach, otrzymamy:

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + nL_{n-1} = 0 \quad (27.2)$$

wzór wiążący trzy wielomiany Laguerre'a kolejnych stopni. Tak więc znając dwa pierwsze jednomiany $L_0 = 1$ i $L_1 = 1-x$, można wyznaczyć pozostałe funkcje. Ze wzoru wynika ponadto, że funkcje $L_n(x)$ są wielomianami. Wyraz wolny wielomianów równa się 1, co wynika z zadania 1, potwierdzone też przez zadanie 3. Wielomiany te można wyrazić w formie zamkniętej:

$$L_n(x) = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - \binom{n}{3}\frac{x^3}{3!} \pm \dots \quad (27.3)$$

Ze wzoru wynika, że współczynnik wiodący a_n przy potędze x^n równa się $(-1)^n \binom{n}{n} \frac{1}{n!}$, czyli:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (27.4)$$

Różniczkowanie rozwinięcia (27.1) względem parametru x , daje:

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \frac{-t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n.$$

Korzystając z rozwinięcia (27.1) na funkcję tworzącą, otrzymamy:

$$-t \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n.$$

Przyrównując wyrazy przy t^n , otrzymamy:

$$L_{n-1} = L'_{n-1} - L'_n. \quad (27.5)$$

Chcemy wyrazić pochodną wielomianu w kategoriach wielomianów. Różniczkując (27.2) względem x , otrzymamy:

$$(n+1)L'_{n+1} - (2n+1-x)L'_n + nL'_{n-1} + L_n = 0.$$

Podstawiając $L'_{n+1} = L'_n - L_n$, co wynika ze wzoru (27.5), po uporządkowaniu uzyskamy:

$$xL'_n = n(L'_n - L'_{n-1} + L_n).$$

Korzystając jeszcze raz ze wzoru (27.5), uzyskamy ostatecznie:

$$xL'_n = n(L_n - L_{n-1}). \quad (27.6)$$

Równanie to wyraża pochodną wielomianu za pomocą dwóch wielomianów.

b) Równanie różniczkowe

Można je znaleźć w oparciu o wzory rekurencyjne. Różniczkując (27.6), otrzymamy:

$$L'_n + xL''_n = n(L'_n - L'_{n-1}).$$

Musimy wyrugować z równania L'_{n-1} . Z równania przed (27.6) mamy:

$$n(L'_n - L'_{n-1}) = xL'_n - nL_n.$$

Wstawiając je do równania wyżej, mamy:

$$L'_n + xL''_n = xL'_n - nL_n$$

równanie, które prowadzi do liniowego równania różniczkowego II rzędu:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad (27.7)$$

które spełnia funkcja $y \equiv L_n(x)$. Nosi ono nazwę *równania różniczkowego Laguerre'a*.

c) Ortogonalność wielomianów Laguerre'a

Ortogonalność wielomianów oznacza, że spełniają one równanie:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (27.8)$$

Spróbujemy je udowodnić w oparciu o funkcję tworzącą V . Wpierw pomnożmy stronami rozwinięcie (27.1) przez $e^{-x/2} \equiv \exp(-\frac{1}{2}x)$:

$$\frac{e^{-x(t+1)/2(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x} L_n(x) t^n$$

i podnieśmy stronami do kwadratu:

$$\frac{e^{-x(t+1)/(1-t)}}{(1-t)^2} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x} L_n(x) t^n \right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) t^{m+n}.$$

Kwadrat sumy zamieniliśmy na sumę podwójną. Całkując stronami względem x w granicach od 0 do ∞ , otrzymamy:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x(1+t)/(1-t)}}{(1-t)^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx \right] t^{m+n}.$$

Zakładając, że zachodzi wzór (27.8), suma podwójna zredukuje się do pojedynczej sumy:

$$\frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{\infty} e^{-x(1+t)/(1-t)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx \right] t^{2n}. \quad (27.9)$$

Oznaczmy przez $\alpha = (1+t)/(1-t)$. Całka:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = 1/\alpha.$$

Zatem całka z kwadratu funkcji tworzącej wyrazi się wzorem (patrz § 29):

$$\frac{1}{(1-t)^2} \frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \dots$$

na szereg geometryczny ($q = t^2$). Zauważmy, że w rozwinięciu występują jedynie potęgi $n+n=2n$, nie ma potęg $m+n$, co dowodzi słuszności wzoru (27.8). Przyrównując współczynniki potęg t^{2n} w powyższym szeregu i po prawej stronie wzoru (27.9), otrzymamy:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx = 1 \quad (27.10)$$

wynik nieoczekiwany, niezależny od n . Jego prawdziwość potwierdzają obliczenia numeryczne, jak też analityczne.

Zadania

1. Znaleźć wartości wielomianów $L_n(x)$ w punkcie początkowym $x = 0$.

R o z w i ą z a n i e. Podstawiając w rozwinięciu (27.1) $x = 0$, otrzymamy:

$$\frac{1}{1-t} \equiv 1 + t + t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(0) t^n.$$

Ze wzoru wynika, że $L_n(0) = 1$, czyli wszystkie wielomiany Laguerre'a mają wartość 1 w zerze, czyli wszystkie zaczynają się w punkcie $(0, 1)$.

2. Znaleźć nachylenie wielomianów $L_n(x)$ w punkcie początkowym $x = 0$.

R o z w i ą z a n i e. Różniczkowanie rozwinięcia (27.1) względem x , daje:

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \frac{-t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n.$$

Podstawiając $x = 0$, otrzymamy:

$$\frac{-t}{(1-t)^2} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(0) t^n.$$

Problemem jest inteligentne rozwinięcie lewej strony w szereg Maclaurina. Iloraz możemy przekształcić na dwa ułamki proste, łatwo rozwijalne w szereg geometryczny:

$$\begin{aligned} \frac{-t}{(1-t)^2} &= \frac{1-t-1}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t} - \left(\frac{1}{1-t} \right)' = \\ &= 1 + t + t^2 + t^3 + \dots - (1 + t + t^2 + t^3 + \dots)' = \\ &= 1 + t + t^2 + t^3 + \dots - (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \dots). \end{aligned}$$

Po odjęciu obydwu szeregów, otrzymamy:

$$\frac{-t}{(1-t)^2} = -(t + 2t^2 + 3t^3 + \dots).$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach t po lewej i prawej stronie tożsamości, otrzymamy, że $L'_n(0) = -n$.

3. Wiedząc, że $L_0 = 1$ i $L_1 = 1 - x$, znaleźć cztery kolejne wielomiany Laguerre'a.

O d p o w i e d ź:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), \\ L_3 &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \\ L_4 &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24), \\ L_5 &= \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120). \end{aligned}$$

4. Pokazać, że:

$$-x^2 L''_n = n[L_n + (x-1)L_{n-1}].$$

Równanie to wyraża drugą pochodną wielomianu za pomocą dwóch wielomianów.

5. Pokazać, że funkcją pierwotną L_n jest $L_n - L_{n+1}$.

W s k a z ó w k a: wykorzystać wzór (27.5).

§ 28. Własności wielomianów Hermite'a

W przypadku wielomianów Hermite'a (1822–1901), funkcją wagową $\theta = e^{-x^2/2}$, zaś rozważanym przedziałem jest $\langle -\infty, \infty \rangle$. Funkcją tworzącą jest:

$$V = e^{xt - \frac{1}{2}t^2},$$

która rozwija się w szereg Maclaurina:

$$e^{xt-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (28.1)$$

Biorąc liniowe rozwinięcia funkcji tworzącej V :

$$e^{xt-t^2/2} \approx 1 + xt,$$

widzimy, że dwa pierwsze jednomiany Hermite'a to $H_0 = 1$ i $H_1 = x$.

a) Wzory rekurencyjne

By uzyskać wzory rekurencyjne, zróżniczkujemy dwukrotnie rozwinięcie (28.1), raz względem zmiennej t , a drugi raz względem x . Różniczkując względem t , otrzymamy:

$$e^{xt-t^2/2}(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!}.$$

Korzystając z rozwinięcia (28.1) na funkcję V , otrzymamy:

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!}.$$

Przyrównując wyrazy przy t^n po obu stronach, otrzymamy wzór:

$$H_{n+1} = xH_n - nH_{n-1}, \quad (28.2)$$

który pozwala wyznaczyć następną funkcję na podstawie dwóch poprzednich. Zatem znając dwa pierwsze jednomiany $H_0 = 1$ i $H_1 = x$, można wyznaczyć pozostałe funkcje, jak w zadaniu 1. Ze wzoru wynika ponadto, że funkcje $H_n(x)$ są wielomianami. Ponieważ początkowa funkcja jest parzysta, a następna nieparzysta, to kolejne wielomiany Hermite'a są na przemian parzyste i nieparzyste. Parzyste dla n parzystych, a nieparzyste dla n nieparzystych, tj. $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Wielomiany Hermite'a można wyrazić w formie zamkniętej:

$$H_n(x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2} + 1 \cdot 3 \binom{n}{4}x^{n-4} - 1 \cdot 3 \cdot 5 \binom{n}{6}x^{n-6} \pm \dots \quad (28.3)$$

Ze wzoru wynika, że współczynnik wiodący:

$$a_n = 1,$$

zaś wyraz wolny w przypadku wielomianów parzystych równa się:

$$H_n(0) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) = (n-1)!! \quad (28.4)$$

Jest to zarazem punkt przecięcia się wielomianu z osią rzędnych.

Różniczkowanie rozwinięcia (28.1) względem parametru x , daje:

$$te^{xt-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Korzystając z rozwinięcia (28.1) na funkcję tworzącą, otrzymamy:

$$t \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Przyrównując wyrazy przy t^n , otrzymamy:

$$H'_n = nH_{n-1}. \quad (28.5)$$

Widzimy, że w przypadku wielomianów Hermite'a obydwa wzory rekurencyjne są bardzo proste.

b) Równanie różniczkowe

Można je znaleźć w oparciu o wzory rekurencyjne. Uwzględniając wzór (28.5) we wzorze (28.2), otrzymamy:

$$H_{n+1} = xH_n - H'_n.$$

Różniczkując ten wzór, otrzymamy:

$$H'_{n+1} = H_n + xH'_n - H''_n.$$

Podstawiając za $H'_{n+1} = (n+1)H_n$, co wynika ze wzoru (28.5), otrzymamy:

$$(n+1)H_n = H_n + xH'_n - H''_n,$$

równanie, które prowadzi do liniowego równania różniczkowego II rzędu:

$$y'' - xy' + ny = 0, \quad (28.6)$$

które spełnia funkcja $y \equiv H_n(x)$. Nosi ono nazwę *równania różniczkowego Hermite'a*.

c) Ortogonalność wielomianów Hermite'a

Ortogonalność wielomianów oznacza, że spełniają one równanie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (28.7)$$

z funkcją wagową $\theta(x) = e^{-x^2/2}$. Spróbujemy je udowodnić w oparciu o funkcję tworzącą V . Wpierw pomnożmy stronami rozwinięcie (28.1) przez $e^{-x^2/4} \equiv \exp(-1/4x^2)$:

$$e^{-x^2/4+xt-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2/4} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

i podnieśmy stronami do kwadratu:

$$e^{-x^2/2+2xt-t^2} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2/4} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) \frac{t^{m+n}}{m!n!}.$$

Kwadrat sumy zamieniliśmy na sumę podwójną. Całkując stronami względem x w granicach od $-\infty$ do ∞ , otrzymamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2+2xt-t^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) dx \right] \frac{t^{m+n}}{m!n!}.$$

Zakładając, że zachodzi wzór (28.7), suma podwójna zredukuje się do pojedynczej sumy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2+2xt-t^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n^2(x) dx \right] \frac{t^{2n}}{(n!)^2}. \quad (28.8)$$

Problemem jest obliczenie całki po lewej stronie. Wykładnik funkcji podcałkowej możemy zapisać w równoważnej formie:

$$-1/2x^2 + 2xt = -1/2(x - 2t)^2 + 2t^2.$$

Zatem całka po lewej stronie (28.8) przyjmie postać:

$$e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2+2xt} dx = e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2t)^2/2} dx = e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Ostatnia całka, znana w rachunku prawdopodobieństwa jako *całka Gaussa*, równa się $\sqrt{2\pi}$ – patrz § 29. Tak więc całka po lewej stronie (28.8) przyjmie ostatecznie postać:

$$e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2+2xt} dx = e^{-t^2} \sqrt{2\pi}.$$

Podstawiając ją do (28.8), otrzymamy:

$$\sqrt{2\pi} e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n^2(x) dx \right] \frac{t^{2n}}{(n!)^2}.$$

Rozwijając funkcję wykładniczą w szereg (patrz § 29), otrzymamy:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n^2(x) dx \right] \frac{t^{2n}}{(n!)^2}. \quad (28.9)$$

Zauważmy, że w rozwinięciu występują jedynie potęgi $n + n = 2n$, nie ma potęg $m + n$, co dowodzi słuszności wzoru (28.7). Przyrównując współczynniki potęg t^{2n} po lewej i prawej stronie wzoru (28.8), otrzymamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n^2(x) dx = \sqrt{2\pi} n! \quad (28.10)$$

Całki te bardzo szybko rosną ze wzrostem n .

Zadania

1. Wiedząc, że $H_0 = 1$, a $H_1 = x$, znaleźć cztery kolejne wielomiany Hermite'a.

O d p o w i e d ź:

$$\begin{aligned} H_2 &= x^2 - 1, & H_4 &= x^4 - 6x^2 + 3, \\ H_3 &= x^3 - 3x, & H_5 &= x^5 - 10x^3 + 15x. \end{aligned}$$

2. Znaleźć nachylenie wielomianów nieparzystych $H_n(x)$ w punkcie początkowym $x = 0$.
R o z w i ą z a n i e. Korzystamy ze wzoru (28.5) na pochodną wielomianu. Dana jest ona wzorem $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$. Z kolei wartość wielomianu *parzystego* w zerze dana jest wzorem (28.4). Zatem $H'_n(0) = nH_{n-1}(0)$. Tak więc dla n nieparzystego:

$$H'_n(0) = n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2) = n(n-2)!! = n!!$$

jest iloczynem kolejnych liczb nieparzystych.

3. Pokazać, że :

$$H''_n = n(n-1)H_{n-2}.$$

Zatem punkty przegięcia wielomianów Hermite'a H_n znajdują się w miejscach zerowych wielomianów H_{n-2} .

§ 29. Tożsamości przydatne w zastosowaniach

a) Definicje

$\cos n\theta$	wielomiany parzyste (nieparzyste), gdy n jest parzyste (nieparzyste) względem $\cos\theta$, nazywane wielomianami Czebyszewa I rodzaju, oznaczane przez $T_n(\cos\theta)$. Spełniają związek rekurencyjny $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$, gdzie wielkości początkowe to $T_0 = 1$, $T_1(t) = t$.
$\sin(n+1)\theta/\sin\theta$	wielomiany parzyste (nieparzyste), gdy n jest parzyste (nieparzyste) względem $\cos\theta$, nazywane wielomianami Czebyszewa II rodzaju, oznaczane przez $U_n(\cos\theta)$. Spełniają analogiczny związek rekurencyjny $U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t)$, gdzie wielkości początkowe to $U_0 = 1$, $U_1(t) = 2t$.

b) Tożsamości trygonometryczne przydatne w całkowaniu

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta,$$

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta,$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

c) Użyteczne rozwinięcia

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}$$

Jeśli n jest liczbą naturalną, to szereg przekształca się w wielomian stopnia n :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 \pm \dots$$

Jeśli we wzorze w miejsce x podstawimy x^2 , otrzymamy:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (\arcsin x)' = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 \pm \dots$$

Całkując stronami od 0 do x , otrzymamy:

$$\arcsin x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} \pm \dots$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3 \cdot 6}x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \pm \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \mp \dots$$

Szereg geometryczny zbieżny, gdy iloraz $|q| < 1$:

$$\frac{1}{1+x} = [\ln(1+x)]' = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots \quad q = -x$$

$$\frac{1}{1+x^2} = (\arctg x)' = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots \quad q = -x^2$$

Całkując stronami, otrzymamy:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \dots$$

$$\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \pm \dots$$

Funkcja wykładnicza:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

d) Użyteczne całki

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}} = \arcsin \frac{2x-a}{a} \Big|_0^a = \pi,$$

niezależne od rozciągłości a funkcji wagowej.

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = \pi,$$

niezależne od rozciągłości a funkcji wagowej.

e) Momenty funkcji sinus i kosinus

$$m_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin x dx = -(2\pi)^n - n(n-1)m_{n-2},$$

$$m_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos x dx = n(2\pi)^{n-1} + n(n-1)m_{n-2}.$$

Całki powyższe przedstawiają momenty stopnia n jednego cyklu funkcji sinus czy kosinus względem początku układu. Wyrażają się one wzorami rekurencyjnymi, które otrzymuje się za pomocą dwukrotnego całkowania przez części. Dla $n = 0$ jest to pole pod funkcją, dla $n = 1$ – moment statyczny, dla $n = 2$ – moment bezwładności. Dla $n \geq 3$ momenty te nie mają nazwy. W obu przypadkach $m_0 = 0$. Moment statyczny dla sinusa

$m_1 = -2\pi$, a dla kosinusa $m_1 = 0$. Wzory rekurencyjne pozwalają obliczyć moment dla dowolnego $n \geq 3$, jeśli znamy dwa pierwsze momenty, tj. pole m_0 i moment statyczny m_1 . Dwa dalsze momenty wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} m_2 &= -(2\pi)^2, & m_3 &= -(2\pi)^3 + 6(2\pi), \\ m_2 &= 2(2\pi), & m_3 &= 3(2\pi)^2. \end{aligned}$$

W zastosowaniach bywają też przydatne momenty stopnia n jednego cyklu funkcji sinus czy kosinus względem środka układu:

$$m_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin x dx = [\pi^n - (-\pi)^n] + n(n-1)m_{n-2},$$

przy czym: $m_0 = 0, \quad m_1 = 2\pi,$

$$m_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \cos x dx = -n[\pi^{n-1} - (-\pi)^{n-1}] - n(n-1)m_{n-2},$$

przy czym: $m_0 = m_1 = 0.$

W pierwszym przypadku $m_2 = 0$, w drugim $m_2 = -4\pi$.

Literatura

1. Abramowitz M., Stegun J.A., *Handbook of mathematical functions*, 9th edition, Dover Publications Inc., New York 1970.
2. Antoniewicz J., *Tablice funkcji dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1969.
3. Legras J., *Praktyczne metody analizy numerycznej*, Wydawnictwa N-T, Warszawa 1974.
4. Frąckowiak M., Pawłowski M., *Ćwiczenia z hydromechaniki okrętu*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1978.
5. Kuo Ch., *Komputerowe metody projektowania powierzchni okrętu*, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1973.
6. Pawłowski M., *Całkowanie numeryczne*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1988.
7. Ralston A., *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
8. Ryżyk I.M., Gradsztejn I.S., *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, Warszawa 1964.



MACIEJ PAWŁOWSKI

Doktor habilitowany. Absolwent wydziału okrętowego Politechniki Gdańskiej (1970). W latach 1970-2010 zatrudniony na Politechnice Gdańskiej, jako nauczyciel akademicki. Wykładał hydromechanikę ogólną i okrętową, statykę okrętu, mechanikę techniczną, wytrzymałość materiałów, matematykę stosowaną. Wypromował 10 doktorów. W pracy badawczej koncentrował się na bezpieczeństwie statku po kolizji, gdzie zyskał międzynarodowe uznanie. Odbił staże zagraniczne (w sumie 7 lat) na uniwersytetach w Newcastle upon Tyne, Glasgow, Strathclyde i Lyngby, związane z tą tematyką. W latach 1983-1998 aktywnie uczestniczył w obradach Podkomitetu IMO ds. SLF (stateczności, linii ładunkowych i bezpieczeństwa statków rybackich). Współtwórca przepisów niezatapialności w konwencji SOLAS. W 1995 roku, podczas pobytu w Glasgow, odkrył mechanizm przewracania się na fali statków ro-ro po utracie integralności burty, co dało podstawy metodzie statycznej równoważności SEM (static equivalent method), umożliwiającej przewidywanie przewracania się promu na fali z dokładnością nie gorszą, niż badania modelowe czy symulacje numeryczne. Współpracował z Centrum Techniki Okrętowej oraz Polskim Rejestrem Statków. Publikował w wielu renomowanych czasopismach, jak Transactions SNAME, Journal of Ship Research, Marine Technology and SNAME News, The Naval Architects, i innych. Autor książki Subdivision and damage stability of ships (2004) nt. niezatapialności okrętu w ujęciu probabilistycznym, pierwszej na świecie, współtwórca tej dziedziny wiedzy.

Nakładem Wydawnictwa GSW ukazały się:

- 1 *Podstawy mechaniki*, Gdańsk 2016, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-89762-83-2, <https://tiny.pl/r4jhn>
- 2 *Podstawy mechaniki. Uzupełnienia*, wyd. online (PDF), Gdańsk 2019, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-66270-00-8, <https://tiny.pl/t44dt>
- 3 *Analiza stanu naprężeń. Skrypt dla studentów*, wydanie online (PDF), Gdańsk 2018, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-89762-51-1, <https://tiny.pl/r4jq7>
- 4 *Wytrzymałość zmęczeniowa. Skrypt*, wydanie online (PDF), Gdańsk 2021, Wydawnictwo GSW, ISBN 978-83-66270-19-0, <https://tiny.pl/whjsv>

WYDANIE
ONLINE PDF



9 788366 270237

ISBN 978-83-66270-23-7
Wydawnictwo GSW · 2022
www.gsw.gda.pl/wydawnictwo
Nr katalogowy: [123]



GSW

GDAŃSKA SZKOŁA WYŻSZA